Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 5

МАТЕМАТИКА

А. ПЛЕСНЕР

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МАКСИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 9 I 1939)

Пусть H—унитарное (комплексное Гильбертово) пространство (сепарабельное или несепарабельное). Скалярное произведение двух элементов f и g из H обозначим через (f, g), норму элемента h через $\|h\|=\sqrt{(h, h)}$. Пусть A—максимальный эрмитовый оператор, A^*—его сопряженный. Точки той полуплоскости, которые не являются комплексными собственными значениями оператора A^*, будем обозначать через λ, точки другой полуплоскости, где существует резольвента $R_\mu=(A-\mu E)^{-1}$, — через μ; ν может означать в дальнейшем безразлично λ или μ, т. е. ν может быть произвольным комплексным числом таким, что $Im\,\nu \neq 0$. Положим, $R_\lambda=R_{\bar\lambda}^*$. Таким образом R_ν определено для любого ν; эту совокупность операторов R_ν назовем квазирезольвентой оператора A.

Лемма 1. *Имеем*:

$$(R_\nu h, g)\to 0, \quad (\nu R_\nu h, f)\to 0,$$

если $|\nu|\to\infty$, $|Im\,\nu|>\vartheta>0$, *h и g—любые элементы из H, а f—элемент из области определения A.*

При помощи теоремы Коши доказывается лемма 2 и теорема I (последняя с применением и леммы 1).

Лемма 2. *Для любого конечного интервала Δ имеет*:

$$\left|\int_\Delta (R_\nu h, g)\,d\sigma\right|=O\left(\lg\frac{1}{|\tau|}\right); \quad \nu=\sigma+i\tau.$$

Теорема I. *Если положить* $P(\sigma, \tau)=\frac{\operatorname{sgn}\tau}{2\pi i}(R_\nu-R_{\bar\nu})$, *то имеет место соотношение*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\sigma, \tau)\,h\cdot d\sigma=h. \tag{1}$$

Аддитивную функцию интервала $E(\Delta)$, определенную [для интервалов Δ непрерывности функции $(E(\Delta)h, h)$] формулой $(E(\Delta)h, h)=\lim_{\tau\to 0}\int_\Delta (P(\sigma, \tau)h, h)\,d\sigma$, будем в дальнейшем называть спектральной функцией оператора A. Ее введение дает возможность получить интегральные представления для квазирезольвенты R_ν и оператора A.

Т е о р е м а II. *Для квазирезольвенты R_ν имеем представление*

$$R_\nu h = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dE(\Delta_\xi)\,h}{\xi - \nu}, \tag{2}$$

где h — любой элемент из H.

Т е о р е м а III. *Для всех f из области определения A имеем:*

$$Af = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi\, dE(\Delta_\xi) f; \tag{3}$$

f принадлежит тогда и только тогда области определения A, если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^2 (dE(\Delta_\xi) f, f)$ имеет конечное значение; в этом случае имеем:

$$(Af, Af) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^2 d(E(\Delta_\xi) f, f).$$

Т е о р е м а IV. *Кроме очевидных свойств:* 1) $(E(\Delta)h, h) \geqslant 0$, 2) $E(\Delta) = E(\Delta_1) + E(\Delta_2)$, *если* $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, *спектральная функция* $E(\Delta)$ *обладает еще свойством полноты:* 3) $E(\Delta)h \to h$ $(\|h - E(\Delta)h\| \to 0)$, *если* $\Delta = (a, b)$ *и* $a \to -\infty$, $b \to \infty$.

В случае максимального, но не гипермаксимального оператора спектральная функция не обладает свойством ортогональности; поэтому мы введем в рассмотрение как отклонение от ортогональности оператор $D(\delta, \Delta) = E(\delta\Delta) - E(\Delta)E(\delta)$ и назовем его отклонением максимального оператора A или соответствующей спектральной функции $E(\Delta)$. Как известно, отклонение $D(\delta, \Delta)$ будет тогда и только тогда тождественно равно нулю, если A—гипермаксимальный оператор.

Т е о р е м а V. $(D(\delta, \Delta)h, h)$ *является аддитивной и абсолютно непрерывной функцией интервала* δ, *соответственно* Δ, *если закрепить интервал* Δ, *соответственно* δ, *так, что*

$$(D(\delta, \Delta)h, h) = \int\limits_{\delta} \Phi(\xi, \Delta;\, h)\, d\xi = \int\limits_{\Delta} \Psi(\delta, \eta;\, h)\, d\eta, \tag{4}$$

причем $\Phi(\sigma, \Delta;\, h)$ *и* $\Psi(\delta, \sigma;\, h)$ *суть граничные функции аналитических функций* $\Phi(\lambda, \Delta;\, h)$ *и* $\Psi(\delta, \mu;\, h)$ *в* λ- *и* μ-*полуплоскостях, с ограниченным средним значением, т. е.* $(\lambda = \sigma + i\tau,\ \mu = \sigma - i\tau)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\lambda, \Delta;\, h)|\, d\sigma < \varkappa(\Delta;\, h), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\delta, \mu;\, h)|\, d\sigma < \varkappa(\delta;\, h). \tag{5}$$

Т е о р е м а VI. *Если функция интервала $E(\Delta)$ обладает свойствами* 1), 2), 3) *из теоремы* IV, *а ее отклонение* $E(\delta\Delta) - E(\Delta)E(\delta)$ *свойствами, указанными в теореме* V, *то* $E(\Delta)$ *является спектральной функцией максимального оператора.*

Важное свойство отклонения $D(\delta, \Delta)$ (его положительность) дает

Т е о р е м а VII. *Если $G(\sigma)$—ограниченная и измеримая функция, то*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\xi)\overline{G(\eta)}\, d_\xi d_\eta (D(\delta_\xi, \Delta_\eta)h, h) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\xi)\, d_\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(\eta)\, \Psi(\delta_\xi, \eta;\, h)\, d\eta =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(\eta)\, d_\eta \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\xi)\, \Phi(\xi, \Delta_\eta;\, h)\, d\xi \geqslant 0. \tag{6}$$

Пусть $\mu_0 = -\varepsilon i$ ($\varepsilon = \operatorname{sgn} Im \lambda$) и T—подпространство H, состоящее из совокупности всех собственных элементов g оператора A^* для собственного значения $\mu_0 = -\varepsilon i$, для которых следовательно $A^* g + \varepsilon i g = 0$. В пространстве T можно выбрать ортогональную и нормированную систему g_α (возможно несчетную) $(g_\alpha, g_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, которая порождает все пространство T. Элементы $E(\Delta) g_\alpha$ при переменном Δ порождают подпространство H_α, являющееся инвариантным по отношению оператора A. Два пространства H_α и H_β ортогональны друг другу. Совокупность всех элементов из H, ортогональных ко всем H_α, образует в свою очередь инвариантное подпространство H_0. Имеем поэтому разложение основного пространства на инвариантные ортогональные подпространства

$$H = H_0 + \sum_\alpha H_\alpha. \tag{7}$$

Любой элемент h из H разлагается при этом:

$$h = h_0 + \sum_\alpha h_\alpha; \quad h_0 \subset H_0, \quad h_\alpha \subset H_\alpha, \tag{7'}$$

причем h_α отлично от нуля не более чем для счетного числа индексов α. Обозначим через A_α, соотв. A_0, оператор A_0, если его рассматривать только на H_α, соотв. H_0. Все эти операторы — максимальные эрмитовые операторы, A_0—даже гипермаксимальный оператор. Для A_α пространство T_α собственных элементов A_α^* для $\mu_0 = -\varepsilon i$ состоит из элементов $c g_\alpha$(1).

Построим сейчас оператор K, который окажется изометрически эквивалентным с каждым из операторов A_α и в некотором смысле является их каноническим представлением. Рассмотрим совокупность аналитических функций $F(\lambda)$ в λ-полуплоскости, удовлетворяющих условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(\lambda)|^2}{1+\sigma^2} d\sigma < \varkappa$, $\lambda = \sigma + i\tau$. Пусть $F(\sigma)$—граничная функция $F(\lambda)$ при $\tau \to 0$. Совокупность функции $F(\sigma)$ будет унитарным пространством M, если мы введем скалярное произведение двух элементов $F(\sigma)$ и $G(\sigma)$ из этой совокупности формулой

$$(F, G) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\sigma)\overline{G}(\sigma)\, d\sigma}{1+\sigma^2}. \tag{8}$$

Оператор K в пространстве M определим через

$$KF(\sigma) = \sigma F(\sigma), \tag{9}$$

причем K определено для таких и только таких $F(\sigma)$, для которых и $\sigma F(\sigma)$ принадлежат к M.

Теорема VIII. *Существует такое изометрическое отображение подпространства H_α на M, при котором g_α переходит в $F(\sigma) = 1$, что оператор A_α в H_α индуцирует в M оператор K. Оператор A_α следовательно изометрично эквивалентен оператору K, и таким образом все A_α изометрично эквивалентны друг другу.*

Заметим, что в разложении (7') элемента h из H элементу h_α соответствует в изометрическом отображении H_α на M функция $F_\alpha(\sigma)$; таким образом каждому элементу h из H поставлена в соответствие не более чем счетная совокупность функций $F_\alpha(\sigma)$. Используя эти функции $F_\alpha(\sigma)$, можно дать явное выражение для отклонения $D(\delta, \Delta)$.

Теорема IX. *Пусть h и g—два элемента из H, $F_\alpha(\sigma)$ и $G_\alpha(\sigma)$—соответствующие им функции из M. Тогда имеем*:

$$(D(\delta, \Delta)h, g) =$$

$$= -\sum_\alpha \frac{1}{2\pi i\varepsilon} \int_\delta \int_\Delta \frac{F_\alpha(\xi)\overline{G}_\alpha(\eta)}{(\xi+\varepsilon i)(\eta-\varepsilon i)} \frac{d\xi\, d\eta}{\xi-\eta} + \frac{1}{2}\sum_\alpha \int_{\delta\Delta} \frac{F_\alpha(\xi)\overline{G}_\alpha(\xi)\, d\xi}{1+\xi^2}, \qquad (10)$$

причем, если δ и Δ имеют общие внутренние точки, интегралы в первой сумме нужно понимать как главные значения Коши.

На основе приведенных результатов, являющихся обобщением и дальнейшим развитием исследований Carleman'а (²), может быть построена общая теория функций максимального оператора, изложение которой мы дадим в следующей заметке.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
10 I 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Neumann, Math. Ann., **102** (1929). [2] T. Carleman, Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Uppsala (1923).