Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 5

МАТЕМАТИКА

А. Г. ПИНСКЕР

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РАСШИРЕННЫХ K-ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 28 XII 1938)

В нашей предыдущей заметке (1) было введено понятие расширенного K-пространства и указан метод его построения из данного K-пространства. Рассмотрим теперь некоторые свойства расширенных K-пространств, связывающие их с двумя важными классами K-пространств, а именно с пространствами: регулярными (2) и с единицей (3). Пространство называется пространством с единицей, если в нем указан элемент, именуемый единицей (обозначается 1) и обладающий свойством:

$$\inf(x, 1) > 0, \quad \text{для всякого элемента } x > 0.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Всякое расширенное K-пространство X есть пространство с единицей.*

Доказательство. Пусть $E = \{x_\xi\}$ — трансфинитная последовательность всех положительных элементов пространства X. Через E_1 обозначим совокупность положительных элементов x, удовлетворяющих условию $\inf(x, x_1) > 0$. Пусть x_{ξ_2} — первый элемент последовательности E, не принадлежащий E_1; через E_2 обозначим множество элементов $x > 0$, для которых $\inf(x, x_{\xi_2}) > 0$, и вообще, если определены элементы x_{ξ_η} и множества E_η для всех $\eta < \alpha$, то через x_{ξ_α} обозначим первый элемент последовательности E, не принадлежащий множествам $\{E_\eta\}_{\eta<\alpha}$, и через E_α множество элементов $x > 0$, для которых $\inf(x, x_{\xi_\alpha}) > 0$. В результате определятся трансфинитные последовательности элементов $\{x_{\xi_\alpha}\}$ и соответствующих им множеств $\{E_\alpha\}$. Очевидно, элементы x_{ξ_α} попарно-дизъюнктны, т. е.

$$\inf(x_{\xi_{\alpha'}}, x_{\xi_{\alpha''}}) = 0, \text{ если } \alpha' \neq \alpha'', \tag{1}$$

и для всякого $x > 0$ найдется α такое, что

$$\inf(x, x_{\xi_\alpha}) > 0. \tag{2}$$

Покажем, что $x^* = \sup\{x_{\xi_\alpha}\} < +\infty$. С этой целью образуем множество G, составленное из:

1) всех элементов x_{ξ_α},

2) supremum'ов всевозможных ограниченных совокупностей этих элементов и

3) всех положительных элементов, каждый из которых меньше хотя бы одного элемента первой или второй категории.

Множество G представляет собой конечный комплекс ([1]). Действительно, если бы G принадлежала последовательность $\{na_0\}$, $a_0 > 0$ $(n=1, 2, \ldots)$, то для некоторого $\alpha = \alpha^*$

$$\inf(a_0, x_{\xi_{\alpha^*}}) = a^* > 0.$$

Пусть теперь n—любое натуральное число, найдется α—такое, что $\inf(na^*, x_{\xi_\alpha}) > 0$ и следовательно $\inf(a^*, x_{\xi_\alpha}) > 0$; если бы $\alpha \neq \alpha^*$, то $\inf(x_{\xi_\alpha}, x_{\xi_{\alpha^*}}) > 0$, что противоречит (1), отсюда $\alpha = \alpha^*$ и $\inf(na^*, x_{\xi_{\alpha^*}}) = a_n^* > 0$.

Остается показать, что $na^* = a_n^*$. Действительно, в противном случае $na^* - a_n^* > 0$, $\inf(na^* - a_n^*, x_{\xi_{\alpha^*}}) = 0$ и по (2) при некотором α

$$0 < \inf(na^* = a_n^*, x_{\xi_{\alpha^*}}) \leqslant \inf(na^*, x_{\xi_\alpha}).$$

Как и раньше, отсюда заключаем, что $\alpha = \alpha_0$, т. е.

$$\inf(na^* - a_n^*, x_{\xi_{\alpha^*}}) > 0,$$

что невозможно; следовательно $na^* = \inf(na^*, x_{\xi_{\alpha^*}})$ и $na^* < x_{\xi_{\alpha^*}}$ при всех n. Полученное противоречие убеждает нас в том, что G есть конечный комплекс и $x^* < +\infty$. Если $x > 0$—произвольный элемент пространства X, то при некотором α

$$\inf(x, x^*) \geqslant \inf(x, x_{\xi_\alpha}) > 0.$$

Элемент x^* обладает свойствами единицы пространства и X есть пространство с единицей.

Для регулярных пространств справедливо следующее важное предложение ([2]): если $x_n \to x$, то существует элемент x_0, называемый регулятором сходимости, такой, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$|x_n - x| \leqslant \varepsilon x_0, \qquad \text{при всех } n \geqslant N_\varepsilon.$$

Такая сходимость «с регулятором» имеет место не только в регуляторных пространствах, именно:

Теорема 2. *Сходимость в расширенном К-пространстве есть сходимость с регулятором.*

Доказательство. Пусть X—расширенное пространство, следовательно пространство с единицей, $x_n \to x$ и $\varepsilon = \{e\}$ совокупность единичных элементов пространства X, т. е. элементов, удовлетворяющих условиям: $0 \leqslant e \leqslant 1$ и $\inf(e, 1-e) = 0$; тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, $|x_n - x| \leqslant \varepsilon(1 - e_n) + x^*_{e_n}$, для $n \geqslant N_\varepsilon$, где $e_n \to 0$, убывая, $x^* = \sup\limits_n \{|x_n|\}$ и $x^*_{e_n} = \sup\limits_m \{\inf[me_n, x^*]\}$.

Положим, $x_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^*_{e_n - e_{n+1}} + 1$; $x_0 < +\infty$, так как элементы $\{x^*_{e_n - e_{n+1}}\}$ попарно-дизъюнктны (доказательство конечности элемента x_0 не отличается существенно от аналогичного рассуждения в теореме 1).

Для всякого натурального числа k найдется $N_k > k$ такое, что при $n \geqslant N_k$

$$|x_n - x| \leqslant \frac{1}{k}(1 - e_n) + x^*_{e_n} \leqslant \frac{1}{k} \cdot 1 + \sum_{m=k}^{\infty} \frac{m}{k} x^*_{e_m - e_{m+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k} \cdot 1 + \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{\infty} m x^*_{e_m - e_{m+1}} = \frac{1}{k} x_0.$$

Таким образом элемент x_0 и будет регулятором сходимости последовательности $\{x_n\}$.

Теорема 3. *Пусть $\{x_n\}$—последовательность элементов расширенного K-пространства X и*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0,$$

тогда существует последовательность вещественных чисел λ_n такая, что

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty, \qquad \lim_{n \to \infty} \lambda_n x_n = 0.$$

Доказательство. По предыдущей теореме существует элемент x_0 — регулятор сходимости такой, что

$$|x_n| \leqslant \frac{1}{k^{2s}} x_0, \quad \text{для всех } n \geqslant n_s \; (n_1 < n_2 < \dots),$$

положим, $\lambda_n = 1$ для $n < n_1$ и $\lambda_n = k^s$ для $n_s \leqslant n < n_{s+1}$. Очевидно,

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty, \quad \lambda_n |x_n| \leqslant \frac{1}{k^s} x_0 \quad \text{и}$$

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n x_n = \lim_{n \to \infty} \lambda_n |x_n| = 0.$$

Доказанная теорема, как известно ([2]), верна для регулярных пространств.

Теорема 4. *Расширение регулярного K-пространства X будет регулярным тогда и только тогда, когда X есть пространство с единицей.*

Доказательство. Пусть X—регулярное пространство с единицей; покажем, что его расширение $\overline{X}$ будет также регулярным пространством. Для этого достаточно показать, что если

$$E_n \subset \overline{X}, \quad \sup E_n = x_n \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x,$$

то имеются конечные подмножества $F_n \subset E_n$ такие, что

$$\lim_{n \to \infty} [\sup F_n] = x.$$

Пусть $x^* = \sup_n [\sup E_n]$. Определим для каждого положительного элемента $x \in \overline{X}$ и единичного элемента e элемент

$$x_e = \sup_n \{\inf [ne, 1]\}.$$

Если $E \subset \overline{X}$, то символом E_e будем обозначать множество $\{x_e\}$.

Введем обозначения:

$$e_m = e_m(x) = \sup_n \{ \inf [n(x-m)_+, 1] \} \qquad (m = 1, 2, \dots),$$

$$x_n^{(m)} = (x_n)_{e_m} \text{ и } x_m = x_{1-e_m}.$$

Множества $(E_n)_{1-e_m}$ состоят из ограниченных элементов и следовательно принадлежат пространству X. В виду регулярности X существуют конечные подмножества

$$G_n^{(m)} \subset (E_n)_{1-e_m}, \qquad \sup G_n^{(m)} = y_n^{(m)}$$

такие, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n^{(m)} = x_m \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Так как X есть пространство с единицей, то для всякого $\varepsilon_m > 0$, $\varepsilon_m \to 0$, можно указать единичный элемент $e^{(m)}$ такой, что при всех $n \geqslant N_m$

$$| y_n^{(m)} - x_m | \leqslant \varepsilon_m (1 - e^{(m)}) + x^*_{e^{(m)}} \qquad (m = 1, 2, \dots) \qquad (*)$$

Кроме того, принимая во внимание регулярность пространства X, можно предположить, что при надлежащем выборе чисел ε_m, $e^{(m)} \to 0$. Действительно, пусть $\delta_k \to 0$ и $e_k^{(m)}$—единичные элементы, удовлетворяющие условиям

$$| y_n^{(m)} - x_m | \leqslant \delta_k (1 - e_k^{(m)}) + x^*_{e_k^{(m)}},$$

где

$$e_k^{(m)} \to 0 \text{ при } k \to \infty, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

По известному свойству регулярных пространств ([2]) существует последовательность индексов $\{k_m\}$ такая, что

$$e_{k_m}^{(m)} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Достаточно теперь в неравенстве (*) положить

$$\varepsilon_m = \delta_{k_m} \text{ и } e^{(m)} = e_{k_m}^{(m)}.$$

Пусть $\{n_m\}$—возрастающая последовательность индексов и $n_m \geqslant N_m$, тогда

$$| y_{n_m}^{(m)} - x_m | \leqslant \varepsilon_m (1 - e^{(m)}) + x^*_{e^{(m)}}. \qquad (**).$$

Рассмотрим последовательность множеств $\{G_n^{(k)}\}$, где $k = n_{m+1}$, для $n_m < n \leqslant n_{m+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Очевидно неравенство (**) будет иметь место для всякого n, удовлетворяющего условию $n_m < n \leqslant n_{m+1}$. Образуем множества $\{F_n\}$, положив $x \in F_n$, если $x \in E_n$ и $x_{1-e_m} \in G_n^{(m)}$ (если E_n принадлежит несколько элементов, удовлетворяющих второму условию, берем один из них). Множества $F_n \subset E_n$ и конечны.

Пусть $\sup_n F_n = z_n$, имеем следующее неравенство:

$$| x - z_n | \leqslant | x - x_m | + | x_m - y_n^{(m)} | + | y_n^{(m)} - z_n |, \qquad \text{где } n_m < n \leqslant n_{m+1}.$$

Если $n \to \infty$, то и $m \to \infty$, $| x - x_m | \to 0$, по определению элемента x_m, $| x_m - y_n^{(m)} | \to 0$ в силу равенства (**) и $| y_n^{(m)} - z_n | \to 0$, так как

$$z_n - y_n^{(m)} \leqslant x^*_{e_m}.$$

Отсюда следует

$$\lim_{n\to\infty} z_n = x.$$

Таким образом расширение регулярного пространства с единицей есть регулярное пространство.

Пусть теперь X и его расширение $\overline{X}$ регулярны; покажем, что X есть пространство с единицей.

Как и при доказательстве теоремы 1, построим трансфинитные последовательности элементов $\mathcal{E} = \{x_{\xi_\alpha}\}$ и соответствующих им множеств E_α. Если последовательность $\mathcal{E}$ исчислима, то при подходящих $\lambda_n \to 0$, $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n < +\infty$ (последовательность $\{x_n\}$ образована из всех элементов последовательности $\mathcal{E}$), что легко доказать, принимая во внимание регулярность пространства X, и можно положить $x^* = 1$. Если же последовательность $\mathcal{E}$ неисчислима, то

$$\sup \mathcal{E} = x < +\infty,$$

так как $\overline{X}$ есть расширенное пространство. Но по предположению X — регулярно и по известной теореме существует исчислимое подмножество $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ такое, что

$$x' = \sup \mathcal{E}' = x.$$

Если $x_{\xi_{\alpha_0}}$ не принадлежит $\mathcal{E}'$, то $\inf(x', x_{\xi_{\alpha_0}}) = 0$, между тем как $\inf(x, x_{\xi_{\alpha_0}}) = x_{\xi_{\alpha_0}} > 0$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Институт математики
Ленинградского университета.

Поступило
28 XII 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Пинскер, ДАН, XXI, № 1—2 (1938). [2] L. Kantorovitch, Rec. Math., **2 (44)**, 1. [3] H. Freudenthal, Proc. Akad. Amsterd., XXXIX, 641—651 (1936).