Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 2

МАТЕМАТИКА

Б. В. ГНЕДЕНКО

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛАГАЕМЫХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 27 XI 1938)

Как и в предыдущей заметке [1], мы будем рассматривать последовательность серий случайных величин

$$x_{n,1};\ x_{n,2};\ \ldots;\ x_{n,k_n} \qquad (n=1,2,3,\ldots), \tag{1}$$

независимых в каждой серии и пренебрегаемых в пределе, т. е. таких, что равномерно относительно k $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$

$$\lim_{n\to\infty} P(|x_{n,k}| > \varepsilon) = 0$$

при любом $\varepsilon > 0$. Задачей этой заметки является указание новых необходимых и достаточных условий сходимости законов распределения сумм

$$s_n = x_{n,1} + x_{n,2} + \ldots + x_{n,k_n} \tag{2}$$

к какому-либо предельному закону. Установленные теперь необходимые и достаточные условия, в отличие от данных в предыдущей заметке, выражаются непосредственно через функции распределения $F_{n,k}(x)$ слагаемых $x_{n,k}$.

Основная теорема. *Для того, чтобы последовательность законов распределения сумм (2) сходилась к какому-либо предельному закону распределения $\Phi(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали неубывающие функции $M(x)$ и $N(x)$, определенные первая на $(-\infty, -0)$, а вторая на $(+0, +\infty)$, и постоянные $a, \tau, \gamma(\tau)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. *$-\tau$ есть точка непрерывности $M(x)$, а τ есть точка непрерывности $N(x)$.*

2. $M(-\infty) = N(+\infty) = 0,$

$$\int_{-\tau}^{-0} x^2 dM(x) + \int_{+0}^{\tau} x^2 dN(x) < +\infty.$$

3. $$\sum_{k=1}^{k_n} F_{n,k}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} M(x) \quad \textit{для} \quad x<0,$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} (F_{n,k}(x)-1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} N(x) \quad \textit{для} \quad x>0$$

во всех точках непрерывности функций $M(x)$ и $N(x)$.

4. $$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\tau} x dF_{n,k}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma(\tau),$$

5. $$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{n,k}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{n,k}(x) \right)^2 \right\} = a^2.$$

Заметим при этом, что в случае, если условия теоремы выполнены при каком-либо одном τ, то они автоматически выполняются при соответствующем изменении константы $\gamma(\tau)$ для любого другого τ, для которого $-\tau$ и $+\tau$ являются точками непрерывности функций $M(x)$ и $N(x)$.

В случае, если условия теоремы выполнены, то сама предельная функция распределения определяется через свою характеристическую функцию $\varphi(t)$, которая находится по формуле П. Леви

$$\lg \varphi(t) = i\gamma(\tau)\, t - \frac{a^2}{2} t^2 + \int_{-\infty}^{-\tau} (e^{iut} - 1)\, dM(u) + \int_{\tau}^{+\infty} (e^{iut} - 1)\, dN(u) +$$
$$+ \int_{-\tau}^{-0} (e^{iut} - 1 - iut)\, dM(u) + \int_{+0}^{\tau} (e^{iut} - 1 - iut)\, dN(u). \qquad (3)$$

Формула (3) показывает, что предельный закон распределения $\Phi(x)$ неизбежно принадлежит к числу так называемых безгранично-делимых законов распределения. Этот факт был установлен ранее А. Я. Хинчиным (²).

Из сформулированной основной теоремы без труда вытекают условия сходимости законов распределения сумм (2) к различным специальным предельным законам. Приведем несколько теорем этого вида.

Теорема 1. *Для того, чтобы законы распределения сумм* (2) *сходились к закону Гаусса*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

и слагаемые $x_{n,k}$ были пренебрегаемы в пределе, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ выполнялись условия:

1. $$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{n,k}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. $$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x dF_{n,k}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. $$\sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{n,k}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{n,k}(x) \right)^2 \right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Доказательство. Так как для закона $\Phi(x)$ в формуле (3) нужно положить $M(x) \equiv N(-x) \equiv 0$, $\gamma(\tau) = 0$, $a = 1$, то основная теорема дает условия этой теоремы без вычислений. Только что доказанный результат эквивалентен в сущности теореме Феллера ([3]).

Теорема 2. *Для того, чтобы законы распределения сумм* (2) *пренебрегаемых в пределе слагаемых сходились при $n \to \infty$ к закону Пуассона*

$$P(x) = \sum_{0 \leqslant k < x} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!},$$

необходимо и достаточно, чтобы при каждом $\varepsilon > 0$ выполнялись условия:

1. $\displaystyle \sum_{k=1}^{k_n} \int_{R_\varepsilon} dF_{n,k}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

2. $\displaystyle \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-1|<\varepsilon} dF_{n,k}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda.$

3. $\displaystyle \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{n,k}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

4. $\displaystyle \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{n,k}(x) - \Big(\int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{n,k}(x) \Big)^2 \right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Здесь множество R_ε получается из прямой $-\infty < x < +\infty$ путем выбрасывания областей $|x| < \varepsilon$, $|x-1| < \varepsilon$.

Доказательство. Для закона $P(x)$ в формуле П. Леви нужно положить $a = \gamma(\tau) = 0$, $M(x) \equiv 0$, $N(x) = 0$ для $x < 1$, $N(x) = \lambda$ для $x > 1$. Теперь ясно, что настоящая теорема является очевидным следствием основной теоремы.

Теорема 2 одновременно и независимо от меня была найдена Марцинкевичем ([4]).

Теорема 3. *Для того, чтобы при любом $\varepsilon > 0$*

$$P\left\{ |x_{n,1} + x_{n,2} + \ldots + x_{n,k_n}| \geqslant \varepsilon \right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и независимые слагаемые $x_{n,k}$ $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ были пренебрегаемы в пределе, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $\varepsilon > 0$ выполнялись условия:

1. $\displaystyle \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|>\varepsilon} dF_{n,k}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

2. $\displaystyle \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{n,k}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

3. $\displaystyle \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{n,k}(x) - \Big(\int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{n,k}(x) \Big)^2 \right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Доказательство. Теорема 3 непосредственно вытекает из основной теоремы, если применить ее к случаю

$$\Phi(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ 1 & \text{при} \quad x>0. \end{cases}$$

Теорема 3 по существу равносильна необходимым и достаточным условиям для закона больших чисел, найденным А. Н. Колмогоровым ([5]) и Феллером ([6]).

Теорема 4. *Для того, чтобы для неотрицательных независимых в каждой серии случайных величин* $x_{n,k}$ *при любом* $\varepsilon>0$ *выполнялось соотношение*

$$P\left\{|x_{n,1}+x_{n,2}+\ldots+x_{n,k_n}-1|>\varepsilon\right\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

и слагаемые $x_{n,k}$ *были пренебрегаемы в пределе, необходимо и достаточно, чтобы при каждом* $\varepsilon>0$:

1. $\sum\limits_{k=1}^{k_n}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} dF_{n,k}(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$

2. $\sum\limits_{k=1}^{k_n}\int\limits_{0}^{\varepsilon} x\,dF_{n,k}(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1.$

Доказательство. Теорема 4 получается из основной теоремы, если в качестве предельного закона для законов распределения сумм (2) взять

$$\Phi(x)=\begin{cases} 0 & \text{для} \quad x<1 \\ 1 & \text{для} \quad x>1. \end{cases}$$

Эта теорема эквивалентна необходимым и достаточным условиям для относительной устойчивости сумм, найденным А. А. Бобровым ([7]).

Математический институт
Московского государственного университета.

Поступило
8 XII 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко, ДАН, XVIII, № 4—5 (1938). [2] А. Я. Хинчин, Математический сборник, **2** (44) (1937). [3] W. Feller, Math. ZS., **40** (1935). [4] J. Marzinkiewicz, Fund. Math., XXX (1938). [5] А. Н. Колмогоров, Math. Ann., **99** (1928). [6] W. Feller, Acta litterarum ac scientiarum, **8** (4), 191—201 (1937). [7] А. А. Бобров, ДАН, XV, № 5 (1937).