Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. М. ГЮНТЕР, член-корреспондент Академии Наук СССР

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Положим, что даны область (Ω) ограниченной меры и тело (C) областей, принадлежащих (Ω). Строим последовательность сеток интервалов

$$(R_1), (R_2), \ldots, (R_s), \ldots, \tag{1}$$

в которой (R_1)—интервал, заключающий (Ω), и каждая последующая сетка (R_s) получается из предыдущей делением ее интервалов плоскостями, параллельными границам (R_1), причем таким образом, что всякий интервал последовательности (1) принадлежит телу (C). Говоря об интервале (i), мы сохраняем только его общую часть с (Ω) [1].

Положим, (E)—интегрируемый ансамбль меры нуль. Обозначим через (δ_s) ансамбль интервалов, принадлежащих (R_s) и содержащих точки (E). Положим, $(\Omega_s) = (\Omega - \delta_s)$. Положим, что (C_s)—часть (C), принадлежащая (Ω_s).

Положим, что средняя функция $\varphi(\omega)$ определена в каждой (Ω_s), в ней аддитивна и ограниченной вариации, имеет (C_s) телом непрерывности, но не ограниченной вариации в областях, содержащих точки (E).

Если функция $F(x)$ измерима (B), то, понимая под интегралами интегралы Стильтьеса-Радона и предполагая, что предел существует, положим

$$\int\limits_{(\Omega)} \varphi(\omega) F(x)\, d\omega = \lim \int\limits_{(\Omega_s)} \varphi(\omega) F(x)\, d\omega, \qquad s \to \infty, \tag{2}$$

говоря, что интеграл сходится абсолютно, если интеграл

$$\int\limits_{(\Omega)} V(\omega) F(x)\, d\omega, \tag{3}$$

в котором $V(\omega)$—вариация $\varphi(\omega)$, сходится.

Выбираем некоторую среднюю функцию $u(\omega)$ с положительными значениями, удовлетворяющую условиям, перечисленным выше для $\varphi(\omega)$, за весовую функцию. Назовем функцию

$$f(\omega) = \frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} u(\omega) f(x)\, d\omega \tag{4}$$

средним взвешенным значением $f(x)$, считая, что $f(x)$ измерима (B); условимся говорить, что $f(x)$ с суммируемым квадратом, если имеет смысл интеграл:

$$\int\limits_{(\Omega)} u(\omega)\, |f(x)|^2\, d\omega. \tag{5}$$

Сохраняя для областей (Ω_s) определения интеграла Hellinger'a, данные в моем мемуаре ([1]) и в заметке ([2]), условимся говорить, что $v(\omega)$ класса (H), если суммы

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{|v(\omega_k)|^2}{u(\omega_k)} \omega_k, \tag{6}$$

в которых $(\omega_1), \ldots, (\omega_n)$—части области (Ω_s), остаются ограниченными числом H независимо от выбора областей (ω_k) и числа s.

2. Рассматривая уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{(\Omega)} k(\tau, \bar{x}) \varphi(y) d\tau + f(x), \tag{1}$$

в которых ядро $k(\tau, x)$ возможно не ограниченной вариации в (Ω), мы будем говорить, что уравнение—класса (K), если соблюдены условия:

a) Как функция от (τ) $k(\tau, x)$ определено в каждой (Ω_s), имеет тело (C_s) телом непрерывности, в (Ω_s) ограниченной вариации, причем эта вариация с суммируемым квадратом в (Ω_s).

b) Если область (τ) не имеет общих точек с (E), $k(\tau, x)$ измерима (B) и с суммируемым квадратом в (Ω).

c) Ядро $k(\tau, x)$ эрмитово ([2]).

d) Если $K(\tau, x)$—средняя вариация $k(\tau, x)$, то, если (x) принадлежит (Ω_s):

$$\int_{(\Omega_s)} K(\Omega_s, x) \Omega_s K(\xi, x) d\xi < B_s K(\Omega_s, x) \Omega_s, \tag{2}$$

где B_s—постоянная, стремящаяся возможно к бесконечности вместе с s.

Уравнения, рассмотренные Т. Карлеманом ([3]), принадлежат классу (K), так же как и уравнение Вейля, исключенное теорией Т. Карлемана.

Чтобы подойти к уравнениям (1), мы, следуя Т. Карлеману, рассматриваем уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{(\Omega_s)} k(\tau, x) \varphi(y) d\tau + f(x), \tag{3}$$

теория которого набросана в моей заметке ([2]). Для уравнения (3) можно составить спектральную функцию $\theta_s(\tau, \omega, m)$, в которой (τ) и (ω)—области, принадлежащие (Ω_s), а (m)—интервал вещественной оси плоскости переменной λ; свойства этой функции перечислены в параграфе 9 моей заметки ([2]). Среди этих свойств мы отметим равенство

$$\int_{(m)} \frac{\theta_s(\tau, \omega, m)}{\mu} dm = \int_{(\Omega_s)} k(\tau, z) \theta_s(\xi, \omega, m) m d\xi, \tag{4}$$

справедливое для всякого интервала (m), не исключая интервалов, заключающих точку $\mu = 0$, и интервалов бесконечно протяженных, и неравенство

$$\left| \int_{(\Omega_s)} h_1(x) \left(\int_{(\Omega_s)} h(y) \theta_s(\tau, \omega, m) m\, d\tau \right) d\omega \right| <$$

$$< \sqrt{\int_{(\Omega_s)} u(\omega) |h_1(x)|^2 d\omega} \sqrt{\int_{(\Omega_s)} u(\omega) |h(x)|^2 d\omega}. \tag{5}$$

3. Функция $\theta_s(\tau, \omega, m)$ как функция от (m) определена для интервалов, концы которых не принадлежат счетному ансамблю (E_s). Поло-

жим, (E_*)—ансамбль, содержащий точки всех (E_s). Строим сетки интервалов

$$(r_1),\ (r_2), \ldots, (r_n), \ldots, \tag{1}$$

концы которых не принадлежат (E_*). Образуя тройки из интервалов (τ_i), (ω_j), (m_k), входящих в сетки (1, 1) и (1, 3), нумеруем эти тройки в каком-нибудь порядке. Перебирая указанные тройки, можно выбрать закон изменения s_n значений s таким образом, чтобы переменная $\theta_{s_n}(\tau_i, \omega_j, m_k)$ имела предел $\theta(\tau_i, \omega_j, m_k)$ для каждой тройки. Пользуясь неравенствами (5, 2), можно определить функцию $\theta(\tau, \omega, m)$ для всех (τ) и (ω) тела (C), не имеющих общих точек с (E), и для интервалов (m), концы которых не принадлежат некоторому счетному ансамблю (E_0). Тело (C)—тело непрерывности функции $\theta(\tau, \omega, m)$; предположение, что функций $\theta(\tau, \omega, m)$ несколько, не исключено.

4. Можно доказать, что, когда $h(x)$ и $g(x)$—функции с суммируемым квадратом, интеграл

$$\theta(h, g, m) = \int\limits_{(\Omega)} g(x)\Big(\int\limits_{(\Omega)} h(y)\,\theta(\tau, \omega, m)\,d\tau\Big)\,d\omega \tag{1}$$

имеет смысл; что в интеграле (1) можно менять порядок интегрирования; что

$$|\theta(h, g, m)|\, m < \sqrt{\int\limits_{(\Omega)} u(\omega)\,|g(x)|^2\,d\omega}\ \sqrt{\int\limits_{(\Omega)} u(\omega)\,|h(x)|^2\,d\omega} \tag{2}$$

и что высказанные утверждения остаются в силе и тогда, когда мера (m) бесконечно велика; их можно даже обобщить, вводя непрерывную функцию $\varphi(\mu)$, ограниченную в промежутке $(-\infty, +\infty)$, установив, что интеграл

$$\int\limits_{(\Omega)} g(x)\Big(\int\limits_{(\Omega)} h(y)\Big(\int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} \theta(\tau, \omega, m)\,\varphi(\mu)\,dm\Big)\,d\tau\Big)\,d\omega \tag{3}$$

имеет смысл и что можно менять порядок интегрирования; знаком

$$\int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} \theta(h, g, m)\,\varphi(\mu)\,dm \tag{4}$$

мы обозначаем предел $\theta(h, g, m)\, m$, где $(m) = (\mu', \mu'')$, когда $\mu' \to -\infty$, $\mu'' \to +\infty$; наконец имеем равенство

$$\int\limits_{(m)} \frac{\theta(\tau, \omega, m)}{\mu}\,dm = \int\limits_{(\Omega)} k(\tau, z)\,\theta(\xi, \omega, m)\,m\,d\xi, \tag{5}$$

которое остается справедливым и тогда, когда (m) содержит точку $\mu = 0$. При этом

$$\int\limits_{(\Omega)} h(y)\Big[\int\limits_{(m)} \frac{\theta(\tau, \omega, m)}{\mu}\,dm\Big]\,d\tau = \int\limits_{(m)} \frac{\theta(h, \omega, m)}{\mu}\,dm; \tag{6}$$

но теорема, установленная для (1), перестает быть справедливой, когда $\varphi(\mu) = \frac{1}{\mu}$ и (m) содержит точку $\mu = 0$.

5. Обозначая через (m_e) геометрическое место точек вещественной оси плоскости λ, не принадлежащих интервалу (m) конечной меры, и полагая

$$\theta(\tau, \omega, m_e)\,m_e = \delta(\tau, \omega) - \theta(\tau, \omega, m)\,m, \tag{1}$$

где $\delta(\tau, x)$—функция, равная нулю или $\frac{1}{\tau}$, смотря по тому, вне (τ) точка (x) или внутри, можно доказать, что (5, 4) справедливо для (m_e) и что, если $h(x)$ с суммируемым квадратом, то справедливо тождество

$$h(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{(\Omega)} h(y)\, \theta(\tau, \omega, m)\, d\tau \Big) d\omega, \tag{2}$$

в котором правая часть—интеграл, взятый на целой оси.

6. Условившись говорить, что $\theta(\tau, \omega, m)$ замкнута, если

$$\delta(\tau, \omega) = \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} \theta(\tau, \omega, m)\, dm, \tag{1}$$

можно установить, что когда $\theta(\tau, \omega, m)$ замкнута, то для всякой $h(x)$ с суммируемым квадратом

$$h(\omega) = \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} \Big(\int_{(\Omega)} h(y)\, \theta(\tau, \omega, m)\, d\tau \Big) dm. \tag{2}$$

Пользуясь (5, 4) и исходя от тождества (2, 5), можно доказать, что, если даже $\theta(\tau, \omega, m)$ не замкнута,

$$\int_{(\Omega)} u(\omega)\, k(\tau, x)\, h(x)\, d\omega = \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{1}{\mu} \Big(\int_{(\Omega)} h(x)\, \theta(\tau, \omega, m)\, d\omega \Big) dm, \qquad k(\tau, \omega) = \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{\theta(\tau, \omega, m)}{\mu}\, dm. \tag{3}$$

7. Условимся говорить, что функция $h(x)$ класса (U), если: a) она с суммируемым квадратом, b) если интеграл

$$\int_{(\Omega)} k(\tau, x)\, h(y)\, d\tau \tag{1}$$

имеет смысл и c) если $(e_n^{(s)})$—ансамбль точек, в которых

$$\Big| \int_{(\Omega - \Omega_s)} k(\tau, x)\, h(y)\, d\tau \Big| > n, \tag{2}$$

то ансамбли $(e_n^{(\sigma)})$, $\sigma > s$, содержатся в $(e_n^{(s)})$, когда n достаточно велико. Условие (c) соблюдено, если (1) сходится абсолютно и для уравнения Г. Вейля.

Если функция $h(x)$ класса (U), то

$$\frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} u(\omega) \Big(\int_{(\Omega)} k(\tau, x)\, h(y)\, d\tau \Big) d\omega = \int_{(\Omega)} k(\tau, \omega)\, h(y)\, d\tau = \int_{(\Omega)} \overline{k(\omega, \tau)}\, h(y)\, d\tau. \tag{3}$$

8. Если решение $\varphi(x)$ уравнения (1, 2) принадлежит классу (U), то этому уравнению можно дать вид

$$\varphi(\omega) = \lambda \int_{(\Omega)} \overline{k(\omega, y)}\, \varphi(\tau)\, d\tau + f(\omega). \tag{1}$$

Если $f(x)$ с суммируемым квадратом, то функция

$$\varphi(\omega) = f(\omega) + \lambda \int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{1}{\mu - \lambda}\, \theta(f, \omega, m)\, dm \tag{2}$$

удовлетворяет уравнению (1). Если кроме спектральной функции $\theta(\tau, \omega, m)$ есть другая $\theta_1(\tau, \omega, m)$, то, какова бы ни была $f(x)$ с суммируемым квадратом, функция

$$\psi(\omega) = \lambda \int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{1}{\mu - \lambda}\, [\theta(f, \omega, m) - \theta_1(f, \omega, m)]\, dm \tag{3}$$

удовлетворяет однородному уравнению

$$\psi(\omega) = \lambda \int\limits_{(\Omega)} \overline{k(\omega, y)}\, \psi(\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

Если $\theta(\tau, \omega, m)$ не замкнута и

$$\varphi(\omega) = f(\omega) - \int\limits_{(-\infty)}^{(+\infty)} \theta(f, \omega, m)\, dm, \tag{5}$$

то для всякой $f(x)$ с суммируемым квадратом

$$\int\limits_{(\Omega)} \overline{k(\omega, y)}\, \varphi(\tau)\, d\tau = 0. \tag{6}$$

Если μ_k—точка ансамбля (E_0), если $(m) = (\mu', \mu'')$ содержит μ_k и если

$$\theta(\tau, f, m)\, m \to \varphi_k(\tau, f), \quad \mu' \to \mu_k, \quad \mu'' \to \mu_k, \tag{7}$$

причем предел всегда существует, то

$$\varphi_k(\tau, f) = \mu_k \int\limits_{(\Omega)} k(\tau, z)\, \varphi_k(\xi, f)\, d\xi \tag{8}$$

Поступило
28 XII 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Günther, Sur quelques applications de la théorie des fonctions de domaines à la théorie des équations intégrales, Recueil mathématique, 142 (44). [2] N. Günther, ДАН, XXI, № 5 (1938). [3] T. Carleman, Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique. Uppsala, Univ. Arskrift (1923).