Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. С. ИГНАТОВСКИЙ, член-корреспондент Академии Наук СССР

К ТЕОРИИ РЕШЕТКИ. III.

Мы теперь перейдем к

$$b = \frac{a}{2} \tag{1}$$

и рассмотрим сначала случай I.

Из (4) и (5) нашей предыдущей работы следует:

$$D_0 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n D_{2n+1}}{2n+1}, \tag{2}$$

$$D_{2m} = \frac{4}{\pi} (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) D_{2n+1}}{(2n+1)^2 - (2m)^2}; \quad m \geqslant 1 \tag{3}$$

и

$$D_{2m+1} = -\frac{4}{\pi} (2m+1)(-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n D_{2n}}{(2n)^2 - (2m+1)^2}; \quad m \geqslant 0. \tag{4}$$

Аналогично получим из (6) и (9) нашей работы (см. выше):

$$D_0 - 1 = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n D_{2n+1}}{2n+1} \frac{\beta_0}{\beta_{2n+1}}, \tag{5}$$

$$D_{2m} = -\frac{4}{\pi} (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) D_{2n+1}}{(2n+1)^2 - (2m)^2} \frac{\beta_{2m}}{\beta_{2n+1}}; \quad m \geqslant 1 \tag{6}$$

и

$$D_{2m+1} = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^m \beta_{2m+1}}{(2m+1)\beta_0} +$$

$$+ \frac{4}{\pi} (2m+1)(-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n D_{2n}}{(2n)^2 - (2m+1)^2} \frac{\beta_{2m+1}}{\beta_{2n}}; \quad m \geqslant 0. \tag{7}$$

Можно доказать, что если (2) и (3) существуют, то и (4) верно. Наоборот, если (4) и (2) верны, то будет верно и выражение (3). Аналогичное можно сказать относительно (5) — (7). Поэтому достаточно будет для нас сравнить (2) с (5) и (3) с (6). Мы тогда получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n D_{2n+1}}{2n+1} \left\{ \frac{\beta_0}{\beta_{2n+1}} + 1 \right\} = \frac{\pi}{2} \tag{8}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) D_{2n+1}}{(2n+1)^2 - (2m)^2} \left\{ \frac{\beta_{2m}}{\beta_{2n+1}} + 1 \right\} = 0, \quad m \geqslant 1. \tag{9}$$

Это будут те уравнения, из которых определятся неизвестные и общие D_{2n+1}. Мы видим, что нам необходимо лишь знать нечетные D_{2n+1}, так как D_0 определится из (2), а четные D_{2m} из (3).

Мы имеем

$$\frac{\dfrac{1}{\beta_{2n+1}} + \dfrac{1}{\beta_{2m}}}{(2n+1)^2 - (2m)^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{1}{\dfrac{1}{\beta_{2n+1}} - \dfrac{1}{\beta_{2m}}}. \tag{10}$$

Мы далее введем обозначения

$$\frac{\beta_0}{\beta_n} = \alpha_n; \quad \alpha_0 = 1 \tag{11}$$

и таким образом получим

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &= \sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2a}\right)^2}; & \frac{n\lambda}{2a} &< 1 \\ \alpha_n &= 0; & \frac{n\lambda}{2a} &= 1 \\ \alpha_n &= -i\sqrt{\left(\frac{n\lambda}{2a}\right)^2 - 1}; & \frac{n\lambda}{2a} &> 1 \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Полагая наконец

$$D_{2n+1} = \frac{(-1)^n \pi}{2} \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 \frac{M_{2n+1}}{2n+1}, \tag{13}$$

получим из (8) и (9) систему

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{2n+1}}{\alpha_{2n+1} - \alpha_0} = -1 \tag{14}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{2n+1}}{\alpha_{2n+1} - \alpha_{2m}} = 0; \quad m \geqslant 1. \tag{15}$$

На место (2) и (3) вследствие (13) следует

$$D_0 = \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{2n+1}}{(2n+1)^2} \tag{16}$$

и

$$D_{2m} = (-1)^m 2 \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{2n+1}}{(2n+1)^2 - (2m)^2}; \quad m \geqslant 1. \tag{17}$$

Мы переходим теперь к случаю II. На основании предыдущего этот случай может быть скоро изложен. Для этого введем обозначение

$$D_n = \frac{D'_n}{c}. \tag{18}$$

Система (14), (15) остается в силе и вместо (16) и (17) мы будем иметь

$$D'_0 = 1 - \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{2n+1}}{(2n+1)^2} \tag{19}$$

и

$$D'_{2m} = -(-1)^m 2\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{2n+1}}{(2n+1)^2-(2m)^2}; \quad m \geqslant 1. \tag{20}$$

Если наконец вставить D'_{2n+1} в (13) вместо D_{2n+1}, то первые величины определятся тогда на основании того же выражения.

Теперь мы вернемся к схемам (14), (15) и постараемся найти их решение.

Для этого мы введем функцию $M_{2n+1,\,s}$, которая представляет собою решение этой же схемы, но при s уравнений с s неизвестными. Таким образом мы сначала рассматриваем квадратную схему уравнений, в которой всегда первое [т. е. (14)] уравнение неоднородное, а остальные однородны. Следующие члены (т. е. за s-тым) мы при этом полагаем равными нулю.

Для полного решения этой квадратной схемы мы получим

$$M_{2n+1,\,s} = -\frac{(\alpha_1-\alpha_0)(-1)^n}{\prod\limits_{p=0}^{p=n-1}(\alpha_{2n+1}-\alpha_{2p+1})\prod\limits_{p=1+n}^{p=s-1}(\alpha_{2p+1}-\alpha_{2n+1})}\cdot$$

$$\cdot\prod_{p=1}^{p=s-1}\frac{(\alpha_{2p+1}-\alpha_0)(\alpha_{2n+1}-\alpha_{2p})}{(\alpha_0-\alpha_{2p})}. \tag{21}$$

К этому мы должны заметить, что в знаменателе мы должны поставить: на место первого произведения единицу, а на место второго также единицу при $s-1<1+n$.

При $s=\infty$, $M_{2n+1,\,s}$ переходит в M_{2n+1}, т. е. в искомое решение. Можно показать при всяком конечном n сходимость (абсолютную) бесконечного произведения, из которого состоит M_{2n+1}. Значение $M_{2n+1,\,s}$ в последнем члене в нашей квадратной схеме будет иметь место при $s=n+1$. Если теперь перейти к $n=\infty$, то можно доказать, что $M_{2n+1,\,n+1}$ будет также ограничено.

Из (12) моей работы (см. выше) следует, что в случае I электрическая сила всюду ($x=0$) непрерывна. Очевидно, что магнитная сила, т. е. ряд (2) в той же работе, претерпевает разрыв на краю полосы. В случае II будет происходить обратное.

Мы обозначим теперь

$$M_{2n+1} = s'_{2n+1} + i s''_{2n+1}, \tag{22}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{2n+1}}{(2n+1)^2-(2m)^2} = L'_{2m} + i L''_{2m} \tag{23}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{2n+1}}{(2n+1)^2} = S' + iS''. \tag{24}$$

Мы получим тогда для интенсивностей I_n, считая интенсивность непосредственно прошедшего света за единицу, т. е. полагая $I_0 = 1$, следующее значение:

Для случая I:

$$I_{2n+1} = \left\{ \frac{\pi}{4(2n+1)} \right\}^2 \frac{s'^2_{2n+1} + s''^2_{2n+1}}{S'^2 + S''^2}; \quad I_{2n} = \frac{L'^2_{2n} + L''^2_{2n}}{S'^2 + S''^2}, \tag{25}$$

а для случая II:

$$I_{2n+1} = \left\{ \frac{\pi}{4(2n+1)} \right\}^2 \frac{s'^2_{2n+1} + s''^2_{2n+1}}{\left\{ \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 - S' \right\}^2 + S''^2}; \quad I_{2n} = \frac{L'^2_{2n} + L''^2_{2n}}{\left\{ \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 - S' \right\}^2 + S''^2}, \tag{26}$$

причем в обоих случаях необходимо ставить $I_0 = 1$.

Как численный пример нами взято:

$$\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}; \quad 2a = 2 \cdot 10^{-4} \text{ см}; \quad \frac{\lambda}{2a} = 0.25 = \frac{1}{4}.$$

На основании предыдущего нами получено:

I_0	I_1	I_2	I_3	
1	0.4515	0.0513	0.1214;	случай I
1	0.4174	0.0474	0.1122;	случай II
1	0.4053	0.0000	0.0450;	$\lambda \to 0$.

Третья строка рассчитана на основании (27) нашей работы (см. выше), принимая во внимание (1).

Институт математики и механики.
Ленинградский государственный университет.

Поступило
14 XI 1938.