Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. С. ИГНАТОВСКИЙ, член-корреспондент Академии Наук СССР

К ТЕОРИИ РЕШЕТКИ. II

Прежде чем перейти к случаю $b=\frac{a}{2}$ нашей работы ([1]) (кстати сказать, который нам удалось полностью решить), мы займемся общим случаем, во-первых, потому, что возможно составить уравнения для коэффициентов, а во-вторых, переход к $\lambda \longrightarrow 0$ и $\lambda \longrightarrow \infty$ тут легко возможен и притом в общем виде.

Для этого мы введем в (14) и (15) нашей работы

$$B_n\beta_n = D_n; \quad n \geqslant 0 \tag{1}$$

и получим вместо этих выражений

$$H_0(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{\beta_n} \cos\frac{\pi n y}{a} \tag{2}$$

и

$$N_0(y) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos\frac{\pi n y}{a}\,. \tag{3}$$

В последующем мы будем различать два случая:

Случай I, когда электрическая сила параллельна отверстиям и

Случай II, когда электрическая сила перпендикулярна последним.

Случай I. Его мы имели в виду в нашей работе([1]) и получим из (3)

$$D_0 = \frac{a}{a-b}\,\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{n}\sin\frac{\pi n b}{a} \tag{4}$$

и вследствие (4)

$$D_m = \frac{2a}{(a-b)\pi^2 m}\sin\frac{\pi m b}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{n}\sin\frac{\pi n b}{a} + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty} D_n\cdot a_{n,m}; \quad m \geqslant 1 \tag{5}$$

с таким же значением для $a_{n,m}$, как и прежде.

Выражения (4) и (5) справедливы для любой функции, разложимой в ряд Фурье, равной нулю на полосе, а внутри отверстия — неизвестной [смешанная проблема, см. нашу работу ([1]), а также выражения (18) и (19) там же].

На основании нашего положения получим для $H_0(y)$ из (2)

$$\frac{D_0}{\beta_0}=\frac{1}{\beta_0}-\frac{a}{b}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{n\beta_n}\sin\frac{\pi nb}{a}, \tag{6}$$

припоминая, что $\beta_0=\frac{i}{k}=-\frac{1}{ik}$. Так как

$$c_{n,m}=\int_b^a\cos\frac{\pi ny}{a}\cdot\cos\frac{\pi my}{a}\,dy \tag{7}$$

и равны

$$\left.\begin{aligned} a_{n,m}&=-2c_{n,m}; & n&\neq m\\ a_{n,n}&=-2c_{n,n}+a; & n&=m\end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

то получим поэтому для D_m от $H_0(y)$

$$0=-\frac{2a}{bm\pi^2}\sin\frac{\pi mb}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{n\beta_n}\sin\frac{\pi nb}{a}+\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{\beta_n}a_{n,m};\quad m\geqslant 1. \tag{9}$$

К выражениям (6) и (9) можно сказать аналогичное, как и к (4) и (5), почему мы в нашей работе ([1]) и приняли во внимание тамошнее выражение (9).

Мы видим поэтому, чтобы удовлетворить уравнениям Максвелла, должны существовать одновременно для обеих систем (4), (5) и (6), (9) те же самые D_n. Поэтому, сравнивая (4) с (6), мы получим, введя вместо $a_{n,m}$ его значение:

$$1=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{n}\sin\frac{\pi nb}{a}\left\{\frac{a\beta_0}{b\beta_n}+\frac{a}{a-b}\right\}. \tag{10}$$

Далее приходим при сравнении (5) с (9), причем мы потом помножаем обе стороны на

$$\left\{\frac{a-b}{a}-\frac{\sin\frac{2\pi mb}{a}}{2\pi m}\right\}\left\{\frac{b}{a}+\frac{\sin\frac{2\pi mb}{a}}{2\pi m}\right\},$$

к выражению

$$\frac{2}{\pi^2}\frac{\sin\frac{\pi mb}{a}}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{n}\sin\frac{\pi nb}{a}\left[\frac{b}{a-b}-\frac{a-b}{b}\frac{\beta_m}{\beta_n}+\frac{\sin\frac{2\pi mb}{a}}{2\pi m}\left(\frac{a}{a-b}+\frac{a}{b}\frac{\beta_m}{\beta_n}\right)\right]+$$

$$+\frac{2\cos\frac{\pi mb}{a}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{nD_n}{n^2-m^2}\sin\frac{\pi nb}{a}\left[\frac{b}{a}+\frac{a-b}{a}\frac{\beta_m}{\beta_n}+\frac{\sin\frac{2\pi mb}{a}}{2\pi m}\left(1-\frac{\beta_m}{\beta_n}\right)\right]-$$

$$-\frac{2m\sin\frac{\pi mb}{a}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{D_n}{n^2-m^2}\cos\frac{\pi nb}{a}\left[\frac{b}{a}+\frac{a-b}{a}\frac{\beta_m}{\beta_n}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin\frac{2\pi mb}{a}}{2\pi m}\left(1-\frac{\beta_m}{\beta_n}\right)\right]=0;\quad m\geqslant 1. \tag{11}$$

Из (10) и (11) определяются эти общие D_m, а из (4) определится D_0. Запятая наверху при знаке суммы означает, что мы должны выпустить член, у которого $n=m$.

На краю полосы электрическая сила делается равной нулю, т. е. на основании (3) следует

$$0=\sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos\frac{\pi n b}{a}, \tag{12}$$

что может быть проверено и непосредственно.

Случай II. Также и теперь остаются в силе выражения (2) и (3) с той лишь разницей, что левые части имеют другое значение, так как мы положили полную магнитную силу, которая теперь будет непрерывна, равною $u(x, y)$. Таким образом $N_0(y)$ обозначает магнитную силу при $x=0$, которая на основании нашего положения внутри отверстия равна $\frac{1}{c}$ и неизвестна на полосе. $H_0(y)$ пропорционально электрической силе, равно нулю на полосе. Поэтому мы получим аналогично (4) и (5) случая I для $N_0(y)$

$$D_0-\frac{1}{c}=-\frac{a}{\pi b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{n}\sin\frac{\pi n b}{a} \tag{13}$$

и

$$D_m\left\{\frac{b}{a}+\frac{\sin\frac{2\pi m b}{a}}{2\pi m}\right\}=\frac{2a\sin\frac{\pi m b}{a}}{\pi^2 m b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{n}\sin\frac{\pi n b}{a}-$$

$$-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi m b}{a}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{nD_n}{n^2-m^2}\sin\frac{\pi n b}{a}+$$

$$+\frac{2m}{\pi}\sin\frac{\pi m b}{a}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{D_n}{n^2-m^2}\cos\frac{\pi n b}{a};\quad m\geqslant 1. \tag{14}$$

Выражения, подобные (6) и (9), получим для $H_0(y)$. Сравнение их дает нам аналогично (10) и (11) уравнения для определения D_m для случая II, т. е.

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{n}\sin\frac{\pi n b}{a}\left\{\frac{\beta_0}{\beta_n}\frac{a}{a-b}+\frac{a}{b}\right\} \tag{15}$$

и

$$\frac{2}{\pi^2}\frac{\sin\frac{\pi m b}{a}}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{n}\sin\frac{\pi n b}{a}\left[\frac{a-b}{a}-\frac{b}{a-b}\frac{\beta_m}{\beta_n}-\frac{\sin\frac{2\pi m b}{a}}{2\pi m}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{a-b}\frac{\beta_m}{\beta_n}\right)\right]-$$

$$-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi m b}{a}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{nD_n}{n^2-m^2}\sin\frac{\pi n b}{a}\left[\frac{a-b}{a}+\frac{b}{a}\frac{\beta_m}{\beta_n}-\frac{\sin\frac{2\pi m b}{a}}{2\pi m}\left(1-\frac{\beta_m}{\beta_n}\right)\right]+$$

$$+\frac{2m}{\pi}\sin\frac{\pi m b}{a}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{D_n}{n^2-m^2}\cos\frac{\pi n b}{a}\left[\frac{a-b}{a}+\frac{b}{a}\frac{\beta_m}{\beta_n}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\frac{2\pi m b}{a}}{2\pi m}\left(1-\frac{\beta_m}{\beta_n}\right)\right]=0;\quad m\geqslant 1. \tag{16}$$

Теперь перейдем к $\lambda\to 0$ и соответственно к $\lambda\to\infty$.

Для этого положим в (10) и (11) (случай I)

$$D_n = \frac{2a^2}{\pi n b\,(a-b)} \frac{\sin\frac{\pi n b}{a}}{\frac{a\beta_0}{b\beta_n} + \frac{a}{a-b}} + P_n, \tag{17}$$

а в (15) и (16) положим (случай II)

$$D_n = \frac{2a^2}{c\pi n b\,(a-b)} \frac{\sin\frac{\pi n b}{a}}{\frac{a}{a-b}\frac{\beta_0}{\beta_n} + \frac{a}{b}} + \frac{K_n}{c}. \tag{18}$$

Из (10) и (17) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n \sin\frac{\pi n b}{a}}{n} \left\{\frac{a\beta_0}{b\beta_n} + \frac{a}{a-b}\right\} = 0, \tag{19}$$

а из (15) и (18) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n \sin\frac{\pi n b}{a}}{n} \left\{\frac{a}{a-b}\frac{\beta_0}{\beta_n} + \frac{a}{b}\right\} = 0. \tag{20}$$

Можно показать, что

$$0 = \frac{1}{\pi m}\sin\frac{\pi m b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\frac{\pi n b}{a}}{n^2} \left[\frac{a}{a-b} - \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b\,(a-b)} \frac{\sin\frac{2\pi m b}{a}}{2\pi m}\right] +$$

$$+ \cos\frac{\pi m b}{a} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\sin^2\frac{\pi n b}{a}}{n^2 - m^2} - m \sin\frac{\pi m b}{a} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\sin\frac{\pi n b}{a}\cdot\cos\frac{\pi n b}{a}}{n\,(n^2 - m^2)}; \quad m \geqslant 1. \tag{21}$$

Вставив в (11) выражение (17), перенесем в правую часть члены, не зависящие от P_n. Эту правую часть можно теперь преобразовать на основании (21). Аналогичные рассуждения приложимы и к (16) после введения туда выражения (18). Но мы имеем при $\lambda \to 0$

$$\frac{\beta_m}{\beta_n} = 1 \tag{22}$$

при любом m и n. Поэтому правые части этих выражений исчезнут и мы приходим к заключению, что $P_n = K_n = 0$.

Выражения (17) и (18) делаются одинаковыми за исключением фактора $\frac{1}{c}$ и равными

$$D_n = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n b}{a}. \tag{23}$$

Также и из (4) и (13) получим для D_0 одно и то же выражение $\left(\text{за исключением фактора } \frac{1}{c}\right)$, именно

$$D_0 = \frac{b}{a}. \tag{24}$$

Мы можем получить (23) и (24) непосредственно из (2) и (3) без всяких вычислений, по умножении первого из них на β_0. Вследствие (22) правые части этих выражений равны между собой, а следовательно и левые. Но мы знаем, что для случая I электрическая сила на полосе равна нулю, и потому то же должно быть справедливо и для левой части. Внутри отверстия магнитная сила (вследствие умножения на β_0) равна единице, что очевидно имеет место и для правой части. Поэтому функция, представленная правой частью (2) или (3), определена на длине всего периода $2a$, и потому мы приходим к известному выражению

$$F(y) = \frac{b}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n b}{a}}{n} \cos \frac{\pi n y}{a}, \tag{25}$$

причем

$$F(y) = \begin{cases} 1; & |y| < b \\ 0; & |y| > b \end{cases}. \tag{26}$$

Наконец интенсивности I_n, причем интенсивность непосредственно прошедшего света принята за единицу, равны

$$I_n = \left(\frac{a}{\pi b}\right)^2 \frac{\sin^2 \frac{\pi n b}{a}}{n^2}. \tag{27}$$

К тому же результату (27) приходит и Рэлей ([2]) на основании приближенной теории света.

Для $\lambda \to \infty$ имеем

$$\frac{1}{\beta_n} = -\frac{\pi n}{a}, \quad n \geqslant 1; \quad \beta_0 = \frac{i\lambda}{2\pi}. \tag{28}$$

Таким образом после введения (17) и (18) пропадают вышеозначенные правые части и мы приходим к тому же заключению, что $P_n = K_n = 0$.

Теперь же из (28) следует, что в (17) и (18) D_n стремятся к нулю, как $\frac{1}{\lambda}$ при $\lambda \to \infty$.

Таким образом для случая I из (4) (при $\lambda \to \infty$) следует

$$D_0 = 0, \tag{29}$$

а для случая II вследствие (13)

$$D_0 = \frac{1}{c}. \tag{30}$$

Поэтому на основании предыдущего мы видим, что при $\lambda \to 0$ нет разницы между I и II случаем. При $\lambda \to \infty$ согласно (29) ничего не проходит через решетку, а при случае II решетка пропускает все. Само собою разумеется, что при этом должно быть $b > 0$.

Мы должны заметить, что случаи $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$ мы должны рассматривать лишь как предельные, так как при первом из них функция $F(y)$ делает на основании (26) при $|y| = b$ скачок, что противоречит (12). С другой стороны, мы приходим, при II случае, к статическому состоянию, что является следствием предположения существования бесконечно длинных волн.

Институт математики и механики.
Ленинградский государственный университет.

Поступило
3 XI 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Игнатовский, ДАН, XX, 105—108 (1938). [2] Rayleigh, Phil. Mag. (1874); Scien. Pap., I, 213 (1899).