Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 1

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД и А. Н. КОЛМОГОРОВ

О КОЛЬЦАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 17 XI 1938)

Настоящая статья примыкает к исследованиям M. Stone ([2]) и к публикуемой выше статье Г. Е. Шилова. В отличие от этой последней мы рассматриваем кольцо непрерывных функций, определенных на некотором топологическом пространстве, как чисто алгебраическое образование, не вводя в нем никаких топологических соотношений. Оказывается, что в случае бикомпактных пространств, рассмотренном M. Stone'ом, а также в значительно более общих случаях, уже чисто алгебраическая структура кольца непрерывных функций определяет топологическое пространство с точностью до гомеоморфизма.

Для любого топологического пространства S мы будем рассматривать два кольца: кольцо $C(S)$ всех определенных на S действительных, непрерывных функций и кольцо $C'(S)$ всех ограниченных функций из $C(S)$.

При изучении таких колец естественно ограничиться случаем вполне регулярных пространств S. Объясняется это тем, что кольца $C(S)$ и $C'(S)$ произвольного топологического пространства S соответственно изоморфны кольцам $C(\rho S)$ и $C'(\rho S)$ определенного, однозначно связанного с S, вполне регулярного пространства ρS, введенного E. Čech'ом ([1]). Вместе с пространством ρS в работе E. Čech'а вводится определенное непрерывное отображение $y=\rho(x)$ пространства S на пространство ρS, обладающее следующим свойством: действительные, непрерывные функции на S совпадают с функциями вида

$$f(x)=\varphi[\rho(x)],$$

где $\varphi(y)$—непрерывная, действительная функция на пространстве ρS. Из этого последнего обстоятельства и вытекает, что кольцо $C(S)$ изоморфно кольцу $C(\rho S)$, а кольцо $C'(S)$—кольцу $C'(\rho S)$.

В виду изложенного во всем дальнейшем мы будем предполагать само первоначальное пространство S вполне регулярным (в этом случае ρS совпадает с S).

Будем называть идеал кольца C максимальным, если он не совпадает со всем кольцом, но и не содержится ни в каком большем идеале, кроме самого кольца C. Образуем из множества γ максимальных идеалов кольца C топологическое пространство при помощи следующего определения: максимальный идеал α является точкой прикосновения множества максимальных идеалов $\mathfrak{M}$, если он содержит пересечение всех максимальных идеалов, входящих в $\mathfrak{M}$. Легко проверить, что для любого кольца C это определение точек прикосновения создает из множества γ пространство типа T_1 (по терминологии Alexandroff-Hopf, Topologie I). Заметим, что такой способ введения топологии в множестве максимальных идеалов употреблялся ранее M. H. Stone'ом ([2]).

Будем обозначать пространство γ, соответствующее кольцу $C(S)$, через $\gamma(S)$, а пространство γ, соответствующее кольцу $C'(S)$, через $\gamma'(S)$.

1. Случай бикомпактного пространства S

Если пространство S бикомпактно, то кольца $C(S)$ и $C'(S)$ совпадают (все непрерывные функции на S ограничены), и необходимость их раздельного рассмотрения отпадает.

Теорема I. *Если пространство S бикомпактно, то оно гомеоморфно пространству $\gamma(S)$.*

Для доказательства этой теоремы установим сначала такую лемму:

Лемма. Для любого идеала A кольца $C(S)$, не совпадающего со всем кольцом, существует точка a пространства S, в которой все функции, принадлежащие A, обращаются в нуль.

Доказательство леммы. Допустим обратное. Тогда для каждой точки ξ пространства S можно найти по функции $f_\xi(x)$ из A, которая не равна нулю в точке ξ. Функция $f_\xi(x)$ отлична от нуля в некоторой окрестности $u(\xi)$ точки ξ. По теореме Бореля-Лебега можно выбрать конечное множество точек

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

так, что окрестности

$$u(\xi_1), u(\xi_2), \ldots, u(\xi_n)$$

покрывают все пространство S. Функция

$$\varphi(x) = f^2_{\xi_1}(x) + f^2_{\xi_2}(x) + \ldots + f^2_{\xi_n}(x)$$

принадлежит идеалу A и всюду отлична от нуля. Поэтому любая функция $f(x)$ кольца $C(S)$ может быть представлена в виде

$$f(x) = \psi(x)\,\varphi(x)$$

и следовательно тоже входит в A вопреки допущению. Полученное противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы I. Из установленной леммы вытекает, что любой идеал A, не совпадающий со всем кольцом $C(S)$, содержится в некотором идеале $I(a)$, состоящем из всех функций, обращающихся в нуль в точке a. Значит, только идеалы этого последнего типа могут быть максимальными. Ясно также, что всякий идеал типа $I(a)$ действительно является максимальным. В силу полной регулярности пространства S максимальные идеалы $I(a)$ и $I(a')$, соответствующие двум различным точкам a и a', различны: существует функция из $C(S)$, обращающаяся в нуль в точке a и отличная от нуля в точке a'. Таким образом, ставя каждой точке a пространства S в соответствие максимальный идеал $I(a)$, получаем взаимно однозначное соответствие между пространством S и множеством $\gamma(S)$ максимальных идеалов кольца $C(S)$.

Остается доказать, что полученное соответствие между S и $\gamma(S)$ является гомеоморфизмом.

Пусть множеству M точек пространства S соответствует множество $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов. Если точка a является точкой прикосновения множества M, то все функции, входящие в пересечение всех идеалов из $\mathfrak{M}$, т. е. обращающиеся в нуль во всех точках множества M, обращаются в нуль и в точке a, т. е. входят в идеал $I(a)$, что по определению обозначает, что $I(a)$ есть точка прикосновения множества $\mathfrak{M}$. Обратно, если точка a не является точкой прикосновения для M, то в силу полной регулярности S можно построить функцию $f(x)$ из $C(S)$, обращающуюся в нуль на M и отличную от нуля в точке a; эта функция входит в пересечение всех идеалов из $\mathfrak{M}$, но не принадлежит $I(a)$; значит, в этом случае $I(a)$ не будет точкой прикосновения для $\mathfrak{M}$. Таким образом гомеоморфизм пространств S и $\gamma(S)$ доказан.

Теорема II. *Для того, чтобы два бикомпактных пространства S и S_1 были гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы кольца $C(S)$ и $C(S_1)$ были алгебраически изоморфны.*

Доказательство: Необходимость условия очевидна: всякий гомеоморфизм между S и S_1 автоматически порождает изоморфное отображение кольца $C(S)$ на кольцо $C(S_1)$. Достаточность условия вытекает из теоремы I: из изоморфизма $C(S)$ и $C(S_1)$ очевидным образом следует гомеоморфизм пространств $\gamma(S)$ и $\gamma(S_1)$, эти же последние по теореме I гомеоморфны пространствам S и S_1.

2. Кольцо $C'(S)$ в общем случае

Вопрос об устройстве кольца $C'(S)$ произвольного, вполне регулярного пространства S сводится к случаю бикомпактного пространства S. Для этого сведения следует воспользоваться введенным E. Čech'ом (1) пространством βS. Именно, по E. Čech'у каждому вполне регулярному пространству S соответствует определенное однозначно с точностью до гомеоморфизма пространство βS, характеризующееся следующими условиями:

1) βS бикомпактно.
2) βS содержит S.
3) S плотно на βS.
4) Каждая непрерывная, ограниченная, действительная функция, определенная на S, может быть продолжена на βS с сохранением непрерывности.

Из того, что S плотно на βS, вытекает, что продолжение непрерывных функций с S на βS производится однозначно. Таким образом возникает взаимно однозначное соответствие между ограниченными, непрерывными функциями, определенными на S и на βS. Легко видеть, что при этом кольцо $C'(S)$ отображается изоморфно на кольцо $C'(\beta S)$. Мы доказали следовательно такую теорему:

Теорема III'. *Кольцо $C'(S)$ изоморфно кольцу $C'(\beta S)$* [или, что то же самое, кольцу $C(\beta S)$].

Из теорем I и III' вытекает:

Теорема IV'. *Пространство $\gamma'(S)$ гомеоморфно пространству βS.*

В силу теоремы III′ ясно, что два не гомеоморфных пространства S и S_1 могут иметь изоморфные кольца $C'(S)$ и $C'(S_1)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять за S любое не бикомпактное пространство и положить $S_1 = \beta S$; тогда по теореме III′ кольцо $C'(S)$ изоморфно кольцу $C'(S_1)$. Однако справедлива такая теорема:

Теорема V′. *Для того, чтобы два пространства S и S_1, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, были гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы кольца $C'(S)$ и $C'(S_1)$ были алгебраически изоморфны.*

Доказательство. Достаточность условия устанавливается так же, как в случае теоремы I. Необходимость условия вытекает из того факта, установленного E. Čech'ом[1], что для двух пространств S и S_1, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, из гомеоморфизма βS и βS_1 следует гомеоморфизм исходных пространств S и S_1. В самом деле, из изоморфизма $C'(S)$ и $C'(S_1)$ вытекает гомеоморфизм $\gamma'(S)$ и $\gamma'(S_1)$, т. е. по теореме IV′ гомеоморфизм βS и βS_1, а следовательно в силу упомянутого сейчас результата E. Čech'а и гомеоморфизм между S и S_1.

3. Кольцо $C(S)$ в общем случае

Для кольца $C(S)$ теорема, аналогичная теореме III′, относящейся к кольцу $C'(S)$, не верна. Например, если S есть пространство целых чисел (т. е. счетное множество изолированных точек), а $S_1 = \beta S$, то $C(S)$ и $C(S_1)$ не изоморфны (доказательство этого последнего факта мы опускаем). Однако теоремы, аналогичные теоремам IV′ и V′, остаются в силе:

Теорема IV. *Пространство $\gamma(S)$ гомеоморфно пространству $\beta(S)$.*

Теорема V. *Для того, чтобы два пространства S и S_1, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, были гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы кольца $C(S)$ и $C(S_1)$ были алгебраически изоморфны.*

Теорема V выводится из теоремы IV точно так же, как V′ из IV′. Поэтому нам остается только доказать теорему IV.

Доказательство теоремы IV. Поставим в соответствие каждой функции $f(x)$ из $C(S)$ функцию

$$f_1(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} [f(x)].$$

Функция $f_1(x)$ непрерывна и ограничена на S. Следовательно она продолжается с сохранением непрерывности на пространство βS. Это позволяет в известном смысле распространить на все пространство βS и определение функции $f(x)$. Именно в любой точке множества $\beta S - S$ мы полагаем:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} f_1(x)\right], && \text{если } |f_1(x)| \neq 1; \\ f(x) &= +\infty, && \text{если } f_1(x) = +1; \\ f(x) &= -\infty, && \text{если } f_1(x) = -1. \end{aligned}$$

После того, как функции $f(x)$ распространены на все пространство βS, доказательство теоремы V протекает с некоторыми осложнениями параллельно доказательству теоремы I. Мы ограничимся сообщением лишь основных моментов этого доказательства. Сначала устанавливается следующая лемма:

Лемма 1. Для любого идеала A кольца $C(S)$, не совпадающего со всем кольцом, существует точка a пространства βS, в которой все функции, принадлежащие A, обращаются в нуль.

Любая точка a пространства βS определяет идеал $I(a)$ кольца $C(S)$, состоящий из всех функций $f(x)$ этого кольца, для которых все произведения

$$\varphi(x) = \psi(x) f(x)$$

с множителями $\psi(x)$ из $C(S)$ обращаются в нуль в точке a [если точка a принадлежит $\beta S - S$, то при этом имеется в виду значение $\varphi(a)$ в смысле, определенном выше]. На основе леммы 1 доказывается, что все идеалы типа $I(a)$ максимальны, и никаких других максимальных идеалов в кольце $C(S)$ нет.

Лемма 2. Если точка a принадлежит S, то идеал $I(a)$ состоит из всех функций $f(x)$ кольца $C(S)$, обращающихся в нуль в точке a. Если точка a принадлежит $\beta S - S$, то идеал $I(a)$ состоит из всех функций $f(x)$ кольца $C(S)$, обращающихся в нуль на множестве точек N_f первоначального пространства S, имеющем точку a точкой прикосновения.

Доказательства леммы 2 мы не приводим. Из этой леммы вытекает, что идеалы $I(a)$ и $I(a')$, соответствующие различным точкам a и a', различны. Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками a пространства βS и максимальными идеалами $I(a)$. Подобно тому, как это было сделано в случае теоремы I, доказывается, что установленное соответствие между βS и $\gamma(S)$ является гомеоморфизмом.

Замечание. Из изоморфизма колец $C(S)$ и $C(S_1)$ вытекает (по теореме IV) гомеоморфизм пространств βS и βS_1, а следовательно (по теореме III') и изоморфизм колец $C'(S)$ и $C'(S_1)$. Обратно же, из изоморфизма колец $C'(S)$ и $C'(S_1)$, вообще говоря, еще не следует изоморфизма колец $C(S)$ и $C(S_1)$. Например, если S есть пространство целых чисел, а $S_1 = \beta S$, то кольца $C'(S)$ и $C'(S_1)$ изоморфны, кольца же $C(S)$ и $C(S_1)$ не изоморфны. Таким образом кольцо $C(S)$ является более гибким аппаратом для исследования топологических свойств пространства S, чем кольцо $C'(S)$. Однако все же существуют пространства S и S_1 с изоморфными кольцами $C(S)$ и $C(S_1)$, не гомеоморфные друг другу. Таковы например пространство S трансфинитных чисел $< \Omega$ и пространство S_1 трансфинитных чисел $\leqslant \Omega$, взятые с обычными в них предельными соотношениями.

Поступило
17 XI 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Čech, Annals of Mathematics, 38, 823—844 (1937). [2] M. H. Stone, Trans. Am. Math. Soc., 41, 375—481 (1937).