

Ю. Д. БУЛАНЖЕ

О ВЫЧИСЛЕНИИ ОШИБОК ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ ДВУХ ПУНКТОВ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 26 XII 1938)

1. Классическое решение задачи о вычислении ошибки определения ускорения силы тяжести при относительных маятниковых определениях было дано Боррасом в 1902 г. Исходя из методики гравиметрических работ того времени, Боррас предложил формулы, по которым из различных невязок в наблюдениях представлялось возможным вычислить главнейшие ошибки, имеющие место в наблюдениях, а затем, суммируя их, вычислить среднее значение средней квадратической ошибки пункта данной экспедиции в целом.

Однако в большинстве случаев при использовании материалов гравиметрической съемки величины отдельных ошибок не представляют особого интереса, и бывает вполне достаточно знать лишь их сумму, т. е. среднюю квадратическую ошибку пункта. При этом бывает весьма важно знать ошибку данного отдельного пункта, которую по формулам Борраса вычислить нельзя, а не среднюю по экспедиции. Кроме того формулы Борраса сложны, и применение их в широком объеме затруднительно.

Отсюда возникает необходимость в разработке такого способа вычисления ошибок, который позволил бы, сохраняя достаточную точность вычислений, при сравнительно небольшой затрате труда получить среднюю квадратическую ошибку определения ускорения силы тяжести непосредственно для каждого отдельного пункта экспедиции. Разбору этого способа и посвящена настоящая работа.

2. Приращение силы тяжести при относительных измерениях вычисляется по известной формуле:

$$\Delta g = -2 \frac{g_0}{s_0} \Delta s, \quad (1)$$

где g_0 — приближенное значение силы тяжести, s_0 — приближенное значение периода колебания маятника на исходном пункте и Δs — приращение периода. Ошибка связи двух пунктов будет:

$$M_{\Delta g}^2 = M_{\Delta s}^2 \left(2 \frac{g_0}{s_0} \right)^2, \quad (2)$$

где

$$M_{\Delta s}^2 = M_s^2 + M_{s_0}^2. \quad (3)$$

Под M_s и M_{s_0} понимаются средние квадратические ошибки определения среднего периода на определяемом и исходном пунктах. Эти ошибки могут быть вычислены из трех групп невязок, имеющих место при определении приращения периода:

1. Невязки между интервалами при определении периода одного маятника*.

2. Невязки в разностях «полевой пункт минус исходный», вычисленные по каждому маятнику.

3. Невязки между исходными и заключительными наблюдениями на местном исходном пункте.

Эти невязки возникают в результате многочисленных источников погрешностей, имеющих место при измерении периода колебания маятника и вычислении его поправок. Все эти ошибки в основном могут быть сведены к четырем группам.

1. Ошибки случайного характера, меняющиеся от отсчета к отсчету, от периода к периоду, от маятника к маятнику.

2. Ошибки полусистематического характера, влияющие одинаково на все маятники, наблюдаемые одновременно, но меняющиеся от серии к серии и от интервала к интервалу.

3. Ошибки систематического характера, остающиеся постоянными для данного маятника на пункте, но различные для разных маятников.

4. Ошибки систематического характера, влияющие одинаково на все маятники прибора и остающиеся постоянными для всех наблюдаемых периодов на пункте.

Последняя группа ошибок не может быть определена из невязок между показаниями маятников одного прибора, а потому в дальнейшем мы их рассматривать не будем. Имея в виду сказанное, ошибку определения среднего периода мы можем написать для определяемого пункта:

$$M_s^2 = \sum I + \sum II + \sum III, \quad (4)$$

для исходного

$$M_{s_0}^2 = \sum I_0 + \sum II_0, \quad (4a)$$

где под знаком \sum понимается сумма квадратов всех средних квадратических ошибок, входящих в данную группу.

Средняя квадратическая ошибка среднего периода для данного пункта может быть вычислена по колебаниям периодов отдельных маятников от интервала к интервалу по формуле:

$$m = \pm \frac{1}{k} \sqrt{\sum_1^k \left[\frac{\sum_1^n \delta \delta}{n(n-1)} \right]}, \quad (5)$$

где δ — соответствующие отклонения от среднего, n — число интервалов на пункте, k — число маятников, наблюдаемых одновременно.

С другой стороны,

$$\left. \begin{aligned} M_s^2 &= m^2 + \sum III \\ M_{s_0}^2 &= m_0^2 \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

* Под интервалом понимается совокупность наблюдений между двумя приемами радиосигналов времени.

Вычислим среднюю квадратическую ошибку приращения периода по колебаниям разностей «полевой пункт минус исходный», взятых по каждому маятнику. Эта ошибка будет:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\sum_{1}^k \varepsilon \varepsilon}{k(k-1)}}, \quad (7)$$

где ε — уклонение от среднего.

Но

$$\mu^2 = \sum I + \sum I_0 + \sum III. \quad (8)$$

Непосредственно из равенств (3), (4), (6) и (8) следует, что

$$M_{\Delta s}^2 = m^2 + m_0^2 + \mu^2 - \sum I - \sum I_0. \quad (9)$$

Эта формула и представляет собою принципиальное решение поставленной задачи.

Практика работ с маятниками даже среднего качества показывает, что суммы $\sum I$ и $\sum I_0$ по своей величине, как правило, пренебрегаемо малы по сравнению с μ^2 и m^2 и при условии, что величина $M_{\Delta s}$ должна вычисляться с точностью 6—7%, могут быть отброшены. Только для маятников, резко меняющих свой период от интервала к интервалу (при изменениях порядка 80—100·10⁻⁷ сек.), следует учитывать m_{η} и m_{η_0} — ошибки собственного изменения периода маятника от интервала к интервалу, входящие в выражение $\sum I$ и $\sum I_0$.

Можно показать, что, сохраняя ту же степень точности:

$$m_{\eta_0}^2 = \frac{k^2}{k-1} n_0 \lambda_0^2; \quad m_{\eta}^2 = \frac{k^2}{k-1} n \lambda^2, \quad (10)$$

где λ есть средняя квадратическая ошибка разности вида:

$$S_k = \frac{1}{k} \sum_{1}^k S_k, \quad (11)$$

вычисленная для каждого маятника и затем усредненная.

Таким образом выражение (9) может быть переписано так:

$$M_{\Delta s}^2 = m^2 + m_0^2 + \mu^2 - \frac{k}{k-1} \lambda^2 - \frac{k}{k-1} \lambda_0^2. \quad (12)$$

В выражении (12) под величиной m_0 подразумевается средняя квадратическая ошибка периода среднего маятника из наблюдений, сделанных на местном исходном пункте, точнее из всех тех наблюдений, по отношению к которым вычисляется приращение силы тяжести данного рейса экспедиции. Практика обработки материалов различных экспедиций показывает, что довольно часто встречаются значительные систематические изменения всех маятников между начальными и заключительными наблюдениями на местном исходном пункте. Вычисление же ошибки m_0 по формуле (5) законно лишь в том случае, если мы имеем дело со случайными ошибками. Поэтому перед вычислением m_0 наблюдаемые периоды следует привести к единой системе, исключив эту систематическую разность.

Это преуменьшает истинное значение m_0 , и можно показать, что это преуменьшение приближенно можно учесть по формуле:

$$f_0 = \pm \sqrt{\frac{\sum_{1}^l \nu \nu}{l(l-1)}}, \quad (13)$$

где l — число установок на местном исходном пункте, послуживших для вычисления Δg в данном рейсе, ρ — уклонения от среднего вида:

$$S = \frac{1}{l} \sum_1^l S,$$

а S — среднее значение периода среднего маятника для установки.

Таким образом окончательное выражение для ошибки связи двух пунктов напишется так:

$$M_{\Delta s} = \pm \sqrt{m_0^2 + f_0^2 + \frac{k}{k-1} \lambda_0^2 + \rho^2 + m^2 + \frac{k}{k-1} \lambda^2}, \quad (14)$$

которое и решает поставленную задачу.

4. Для проверки правильности выведенных формул нами были произведены вычисления ошибок определения ускорения силы тяжести по материалам одной из экспедиций Сейсмологического института Ака-

Таблица 1

Названия пунктов	m^2	ρ	$\frac{k}{k-1} \lambda^2$	m_0^2	$\frac{k}{k-1} \lambda_0^2$	f_0^2	$M_{\Delta s}^2$	$M_{\Delta s}$ mgal
Телав	+57	+67	-58	} +5	-3	+9	+77	± 3.4
Пшавели	3	6	0				20	1.7
Джакола	0	2	0				13	1.4
Ахметы	14	66	1				90	3.7
Артани	2	60	1				72	3.3
Сакарауло	1	12	0				24	1.9
Гори	16	16	4				39	2.4
Меджврис-Хеви	11	20	2				40	2.4
Квелант-Убани	0	11	0				22	1.8
Цителли-Колаки	2	108	2				119	4.2
Одзйси	9	45	2				63	3.1
Монастери	8	37	1				55	2.9
Орджоникидзе	12	56	8				71	3.3
Ларс	2	6	1				18	1.6
Казбек	13	160	2				182	5.2
Гудаур	85	357	98				355	7.3
Пассанаур	4	38	3				50	2.7
Душет	5	26	0	42	2.5			

$$(M_{\Delta s})_{cp} = \pm 3.1 \text{ mgal}$$

$$\text{По Боррасу } (M_{\Delta s})_{cp} = \pm 3.3 \text{ mgal}$$

Таблица 2

Названия пунктов	Прибор № 1 g_I	Прибор № 2 g_{II}	$g_{II} - g_I$	По новым формулам
Ларс	980.097	980.097	0	± 1.6
Казбек	979.984	979.992	+8	5.2
Гудаур	979.863	979.854	-9	7.7
Пассанаур	980.066	980.069	+3	2.7
Душет	980.060	980.059	-1	2.5

$$\text{Ошибка определения } \Delta g \text{ одним прибором: } \pm 3.9 \text{ mgal} \quad \pm 3.9 \text{ mgal}$$

демии Наук по предлагаемому методу, по методу Борраса и по разностям определения силы тяжести двумя приборами, наблюдения с которыми велись одновременно в одних и тех же условиях (прибор первый — четырехмаятниковый, прибор типа Штюкрата Askania-Werke № 79533 и прибор второй — трехмаятниковый прибор Кембриджского общества № 136608).

Результаты обработки сведены в прилагаемых табл. 1 и 2. Полное совпадение результатов, полученных тремя различными способами, позволяет думать, что предлагаемый метод, несмотря на его простоту (на вычисление ошибок, приведенных в табл. 1, было затрачено около 4 часов), дает результаты, по точности мало уступающие способу Борраса.

Сейсмологический институт
Академии Наук СССР.

Поступило
25 XII 1938.