Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 1

МАТЕМАТИКА

Г. Е. ШИЛОВ

ИДЕАЛЫ И ПОДКОЛЬЦА КОЛЬЦА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ*

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 17 XI 1938)

Если множество элементов алгебраического кольца образует в то же время топологическое пространство, в котором кольцевые операции сложения, вычитания и умножения непрерывны по обоим аргументам, то мы имеем перед собою топологическое кольцо.

При изучении идеалов топологических колец естественно ограничиться идеалами, которые с топологической точки зрения являются замкнутыми множествами. В дальнейшем мы будем, говоря об идеалах топологических колец, всегда иметь в виду только такие замкнутые идеалы.

Каждый элемент α топологического кольца порождает минимальный содержащий его идеал $J(\alpha)$. Идеал $J(\alpha)$ можно определить или как пересечение всех идеалов, содержащих α, или как замыкание множества всех произведений вида $\beta\alpha$, где β есть произвольный элемент кольца. Каждый идеал, порождаемый каким-либо элементом кольца, называется главным.

Рассмотрим идеалы кольца $C(S)$ всех комплексных непрерывных функций $\alpha(x)$, определенных на некотором компактном метризуемом пространстве S. При этом будем предполагать, что топология в кольце $C(S)$ определена в смысле равномерной сходимости.

Теорема I. *Главный идеал $J(\alpha)$, порождаемый в кольце $C(S)$ функцией $\alpha(x)$, совпадает со множеством всех функций из $C(S)$, обращающихся в нуль на множестве N_α, на котором $\alpha(x)=0$.*

Доказательство. Ясно, что каждая функция из $J(\alpha)$, являясь пределом функций вида $\beta\alpha$, обращается в нуль во всех точках множества N_α. Остается доказать, что, обратно, любая функция $\beta(x)$, обращающаяся в нуль во всех точках N_α, принадлежит $J(\alpha)$. Для этого рассмотрим последовательность функций $\beta_n(x)$, определяемых следующим образом:

$$\beta_n(x)=\beta(x), \quad \text{если} \quad \rho(x, N_\alpha) \geqslant \frac{2}{n},$$

$$\beta_n(x)=n\left\{\rho(x, N_\alpha)-\frac{1}{n}\right\}\beta(x), \quad \text{если} \quad \frac{1}{n} \leqslant \rho(x, N_\alpha) \leqslant \frac{2}{n},$$

$$\beta_n(x)=0, \quad \text{если} \quad \rho(x, N_\alpha) \leqslant \frac{1}{n}.$$

* После сдачи в печать этой работы автор заметил, что теорема I и теоремы, по существу равносильные теоремам III—IV, были установлены более сложным путем в недавно опубликованном мемуаре M. Stone (2).

Легко видеть, что в случае функции $\beta(x)$, обращающейся в нуль во всех точках множества N_α, последовательность функций $\beta_n(x)$ равномерно сходится к $\beta(x)$. Положим теперь:

$$\gamma_n(x) = \beta_n(x) : \alpha(x), \quad \text{если} \quad \rho(x, N_\alpha) \geqslant \frac{1}{n},$$

$$\gamma_n(x) = 0, \quad \text{если} \quad \rho(x, N_\alpha) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Легко видеть, что функции $\gamma_n(x)$ непрерывны на всем пространстве S. Так как при этом

$$\beta_n(x) = \gamma_n(x)\,\alpha(x),$$

то все функции $\beta_n(x)$, а следовательно и функция $\beta(x)$, принадлежат идеалу $J(\alpha)$, что и требовалось доказать.

Теорема II. *Все идеалы кольца $C(S)$ главные.*

Доказательство. Рассмотрим какой-либо идеал J кольца $C(S)$. Обозначим через N_J множество тех точек пространства S, в которых все функции идеала J обращаются в нуль. Пусть

$$\alpha_1(x),\ \alpha_2(x),\ \ldots,\ \alpha_n(x),\ \ldots$$

последовательность функций, принадлежащая идеалу J и всюду плотная на нем. Очевидно, что для любой точки x множества $S - N_J$ в этой последовательности найдется функция, отличная от нуля в точке x. Функция

$$\alpha(x) = \sum_n a_n \alpha_n(x) \overline{\alpha_n(x)},$$

где константы a_n положительны и подобраны так, что ряд в правой части равномерно сходится, положительна в каждой точке $S - N_J$ и принадлежит идеалу J. Следовательно идеал $J(\alpha)$ содержится в идеале J. Так как при этом $J(\alpha)$ содержит все функции, обращающиеся в нуль в каждой точке N_J (см. теорему I), то и, обратно, J содержится в $J(\alpha)$. Таким образом мы доказали, чо идеал J совпадает с главным идеалом $J(\alpha)$.

Теоремы I и II показывают, что существует взаимно однозначное соответствие между идеалами кольца $C(S)$ и замкнутыми множествами пространства S: каждому идеалу J соответствует замкнутое множество N_J и сам идеал J есть не что иное, как множество всех функций из $C(S)$, обращающихся в нуль в каждой точке множества N_J.

При этом для того, чтобы идеал J' содержался в идеале J, необходимо и достаточно, чтобы множество N_J содержалось в множестве $N_{J'}$. Иными словами: частично упорядоченное множество идеалов кольца $C(S)$ с отношением включения в качестве упорядочивающего отношения изоморфно частично упорядоченному множеству замкнутых подмножеств пространства S, упорядоченных обратным образом.

Отсюда легко получается следующая теорема.

Теорема III. *Для того, чтобы два метризуемых компактных пространства S и S' были гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы кольца $C(S)$ и $C(S')$ были непрерывно изоморфны.*

Доказательство. Необходимость условия ясна: гомеоморфизм между пространствами S и S' автоматически порождает непрерывный изоморфизм между кольцами $C(S)$ и $C(S')$.

Докажем достаточность условия. Если кольца $C(S)$ и $C(S')$ непрерывно изоморфны, то частично упорядоченные множества их идеалов тоже изоморфны. Следовательно изоморфны и частично упорядоченные множества замкнутых подмножеств пространств S и S'. Из этого же последнего изоморфизма легко выводится гомеоморфизм пространств S и S'

При изучении подколец кольца $C(S)$ мы ограничимся подкольцами C', удовлетворяющими следующим условиям:

1) C' топологически замкнуто;

2) вместе с функцией $\alpha(x)$ в C' содержатся и все функции вида $k\alpha(x)$, где k—произвольное комплексное число;

3) вместе с функцией $\alpha(x)$ в C' содержится и сопряженная функция $\overline{\alpha(x)}$.

В дальнейшем, говоря о подкольцах кольца $C(S)$, мы будем иметь в виду только подкольца, удовлетворяющие условиям $1-3$.

Две точки x и y пространства S называются сопряженными относительно подкольца C', если для любой функции α из C' справедливо равенство

$$\alpha(x) = \alpha(y).$$

Легко видеть, что все пространство S разбивается на классы элементов, сопряженных относительно C' так, что элементы одного и того же класса сопряжены, а элементы, относящиеся к различным классам, не сопряжены. При этом каждый из классов X сопряженных элементов является замкнутым множеством, а само разбиение

$$S = \sum X$$

пространства S является непрерывным разбиением в смысле П. С. Александрова (1).

Теорема IV. *Каждое подкольцо C' кольца $C(S)$, содержащее единицу, совпадает с множеством всех функций из $C(S)$, постоянных на каждом из множеств X непрерывного разбиения $S = \sum X$ пространства S на классы элементов, сопряженных относительно подкольца C'.*

Для доказательства общей теоремы IV удобно сначала доказать следующее предложение, являющееся ее частным случаем.

Теорема IV$^{\text{bis}}$. *Если подкольцо C° кольца $C(S)$ содержит единицу и если никакие две различные точки x и y пространства S не сопряжены относительно C°, то C° совпадает со всем кольцом $C(S)$.*

Доказательство теоремы IV$^{\text{bis}}$ будет дано в другом месте. Если считать теорему IV$^{\text{bis}}$ доказанной, то доказательство общей теоремы IV осуществляется следующим образом.

Рассмотрим подкольцо C', удовлетворяющее условиям теоремы, и порождаемое им непрерывное разбиение

$$S = \sum X.$$

Как известно (1), непрерывное разбиение $S = \sum X$ порождает непрерывное отображение пространства S на вполне определенное пространство S^*, элементами которого являются множества X. При этом в случае метризуемого и компактного пространства S пространство S^* также метризуемо и компактно и каждый элемент x пространства S отображается в тот элемент

$$X = \varphi(x)$$

пространства S^*, который его содержит.

Легко видеть, что каждая функция $\alpha(x)$ из $C(S)$, постоянная на каждом из множеств X, представляется в виде

$$\alpha(x) = \alpha^*[\varphi(x)],$$

где α^* есть некоторая вполне определенная функция из $C(S^*)$. Соответствие между α^* и α устанавливает непрерывный изоморфизм между кольцом $C(S^*)$ и кольцом C_1 всех функций из $C(S)$, постоянных на каждом из множеств X. Интересующее нас кольцо C' является подкольцом C_1. При установленном изоморфизме между C_1 и $C(S^*)$ подкольцу C' соответствует подкольцо C° кольца $C(S^*)$, удовлетворяющее всем условиям теоремы $\mathrm{IV}^{\mathrm{bis}}$. Следовательно C° совпадает с $C(S^*)$, а C' совпадает с C_1, что и требовалось доказать.

По теореме IV каждое подкольцо C' кольца $C(S)$, содержащее единицу, однозначно определяется по порождаемому им непрерывному разбиению $S = \sum X$ пространства S. Так как и, обратно, каждому непрерывному разбиению пространства S на замкнутые множества соответствует свое собственное, порождающее его, подкольцо C' всех функций, постоянных на каждом из множеств разбиения, то *устанавливается взаимно однозначное соответствие между подкольцами кольца $C(S)$, содержащими единицу, и непрерывными разбиениями пространства S. При этом подкольцо C', соответствующее разбиению $S = \sum X$, непрерывно изоморфно кольцу $C(S^*)$ индуцированного пространства S^* разбиения $S = \sum X$.*

В заключение замечу, что теоремы I и II были независимо получены для случая, когда пространство S есть отрезок [0; 1], В. А. Диткиным. Проблемы, решенные в этой заметке, были поставлены мне И. М. Гельфандом. За это и за постоянный интерес к моим исследованиям выражаю ему искреннюю благодарность.

Поступило
17 XI 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Alexandroff, Mathematische Annalen, **96**, 555—571 (1926). [2] M. H. Stone, Trans. Am. Math. Soc., **41**, 375—481 (1937).