Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. О. СОЛОНОУЦ

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ ДЛЯ НЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 19 XII 1938)

1. До сих пор известно весьма мало случаев точного решения задачи кручения для областей, не имеющих ни одной оси симметрии. Между тем для многих практических задач получение решений такого рода представляет интерес. Так например, для решения задачи о кручении лопасти воздушного винта желательно получить точное решение для контура, близкого к несимметричному плоско-выпуклому винтовому профилю.

2. Для отыскания такого решения мы пользуемся обратным методом Сен-Венана, предполагая, что контур области представляет собой алгебраическую кривую шестого порядка, распадающуюся на две кривые третьего порядка.

Изучая решения уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\mathrm{const}, \tag{1}$$

которые могут быть представлены в виде произведения двух многочленов третьего порядка по x и y, мы получаем, что уравнение (1) может быть точно решено для области, ограниченной следующими линиями:

$$(\alpha^2-1)\,x^3+\alpha\,(\alpha^2-5)\,x^2y+(1-5\alpha^2)\,xy^2+\alpha\,(1-\alpha^2)\,y^3+$$
$$+\left[\frac{4\alpha\beta\,(1+\alpha^2)}{3\alpha^2-1}+\frac{(\alpha^2-3)\,(\alpha^2-1)\,\gamma}{1-3\alpha^2}\right]x^2+\frac{2\beta\,(1+\alpha^2)\,(1+3\alpha^2)+8\alpha\gamma\,(\alpha^2-1)}{3\alpha^2-1}\,xy+$$
$$+\gamma y^2+ax+by+c=0; \tag{2}$$

$$y=\alpha x+\beta. \tag{3}$$

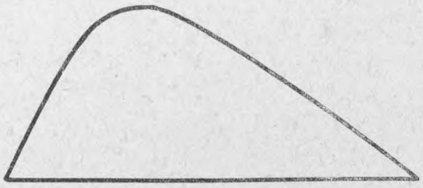
Здесь через β, γ, a, b, c обозначены постоянные величины, которые могут быть выбраны произвольно. Постоянная α должна быть такой, что $\alpha^2\neq 1$.

Если же $\alpha=\pm 1$, то уравнение (3) сохраняет свой вид, а уравнение (2) заменяется следующим:

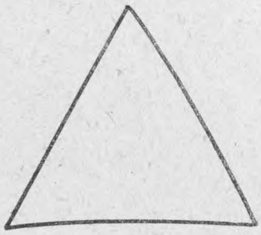
$$x^2y+\alpha xy^2+(\delta-\beta)\,x^2-2\alpha\,(\beta-2\delta)\,xy+\delta y^2+ax+by+c=0. \tag{2a}$$

Здесь δ — новая произвольная постоянная.

Придавая постоянным, входящим в уравнения (2) и (3) или (2a) и (3), некоторые, подходящим образом выбранные значения, мы получаем различные области, подобные изображенным на фиг. 1 и 2.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

На фиг. 1 изображен случай:

$$\alpha = -1; \quad \beta = -3; \quad \delta = 0; \quad \text{[уравнение (2a)]}$$
$$a = b = 0; \quad c = 1.$$

На фиг. 2 — случай:

$$\alpha = \beta = -1; \quad \delta = -2; \quad \text{[уравнение (2a)]}$$
$$a = b = c = 0.$$

При другом выборе параметров могут быть получены также и более плоские профили типа, изображенного на фиг. 1; эти профили близко подходят к плоско-выпуклым винтовым профилям.

Для всех этих случаев функция напряжений является многочленом.

Краснознаменный московский механико-машиностроительный институт им. Баумана.

Поступило 21 XII 1938.