Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. Ю. ПАНОВ

О ВТОРИЧНЫХ ЭФФЕКТАХ ПРИ КРУЧЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 11 XII 1938)

1. Вопрос о вторичных эффектах при кручении (т. е. об эффектах, обнаруживающихся при решении задачи с точностью до членов порядка τ^2 включительно, если через τ обозначена крутка) до сих пор решался лишь для круглого стержня [Сэт (1), Риз (2)], причем в решении существенным образом использовалась осевая симметрия. В настоящей заметке мы даем точное решение задачи о вторичных эффектах при кручении эллиптического цилиндра с помощью метода, который может быть распространен на случай призматического стержня с любым сечением, имеющим функцию кручения в виде полинома.

2. Мы решаем задачу в координатах x, y, z окончательного состояния, используя следующие соотношения между перемещениями, компонентами деформаций и напряжений:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right], \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right], \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} X_x &= (\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_{xx} + \lambda\,(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx}^2 + \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) - \\ &- (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}) - 2\lambda\,\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + (3\lambda + 5\mu)(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2) + 3\lambda\,\varepsilon_{yz}^2; \\ X_y &= 2\mu\varepsilon_{xy} + (\lambda + 3\mu)(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{xy}) + (\lambda - 2\mu)\,\varepsilon_{xy}\varepsilon_{zz} + 5\mu\,\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Формулы (2) представляют собой формулы Мёрнахана (3), в которых константы определены по гипотезе Риза-Зволинского (4).

К формулам (1) и (2) присоединяются уравнения равновесия

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \qquad (3)$$

и граничные условия

$$X_x \cos\alpha + X_y \cos\beta + X_z \cos\gamma = 0 \qquad (4)$$

на деформированной поверхности.

Мы рассматриваем цилиндр, поперечное сечение которого есть эллипс с полуосями a и b.

Полагая

$$u = -\tau yz + \tau^2 U, \quad v = \tau xz + \tau^2 V, \quad w = \tau Cxy + \tau^2 W, \qquad (5)$$

где

$$C = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

получаем из формул (1)—(4) следующие уравнения для определения U, V и W:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \mu\Delta U = -\frac{1}{4}[2\lambda(C^2+6C+1) + \mu(C^2-9)]\,x;$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \mu\Delta V = -\frac{1}{4}[2\lambda(C^2-6C+1) + \mu(C^2-9)]\,y; \tag{6}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \mu\Delta W = 2(\lambda+\mu)z$$

и граничные условия

$$\lambda\Theta\cos\alpha_0 + \mu\left(\frac{\partial U}{\partial\nu_0} + \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha_0 + \frac{\partial V}{\partial x}\cos\beta_0\right) =$$

$$= \left[(\lambda+\mu)z^2 - \frac{1}{4}\lambda(C^2+6C+1)x^2 - \frac{1}{4}(\lambda+\mu)(C^2-6C+1)y^2\right]\cos\alpha_0 -$$

$$-\frac{1}{4}\mu(C^2-4C-1)xy\cos\beta_0; \tag{7}$$

$$\lambda\Theta\cos\beta_0 + \mu\left(\frac{\partial V}{\partial\nu_0} + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\alpha_0 + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta_0\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\mu(C^2+4C-1)xy\cos\alpha_0 + \left[(\lambda+\mu)z^2 - \frac{1}{4}(\lambda+\mu)(C^2+6C+1)x^2 -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}\lambda(C^2-6C+1)y^2\right]\cos\beta_0;$$

$$\mu\left(\frac{\partial W}{\partial\nu_0} + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\alpha_0 + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\beta_0\right) = -\mu(2C-1)xz\cos\alpha_0 + \mu(2C+1)yz\cos\beta_0,$$

которые должны выполняться на поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{8}$$

В формулах (7) $\cos\alpha_0$, $\cos\beta_0$ и $\frac{\partial}{\partial\nu_0}$ связаны с нормалью к поверхности (8).

3. Можно показать, что решение уравнений (6), удовлетворяющее граничным условиям (7), имеет следующий вид:

$$U = \frac{1}{2}xz^2 + A_1x^3 + A_2xy^2 + \frac{\lambda+2\mu}{4\mu(\lambda+\mu)}\left[2A_3x + 12A_4xy^2 -\right.$$

$$\left. -\frac{12(A_4+A_5)}{b^2\left(\frac{3}{a^4}+\frac{3}{b^4}+\frac{2}{a^2b^2}\right)}\left(\frac{x^3}{3a^2}+\frac{3xy^2}{b^2}-x\right)\right] - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}\left[2A_3x + 4A_5x^3 -\right.$$

$$\left. -\frac{12(A_4+A_5)}{a^2\left(\frac{3}{a^4}+\frac{3}{b^4}+\frac{2}{a^2b^2}\right)}\left(\frac{x^3}{a^2}+\frac{xy^2}{b^2}-x\right)\right]; \tag{9}$$

$$V = \frac{1}{2}yz^2 + A_7x^2y + A_8y^3 + \frac{\lambda+2\mu}{4\mu(\lambda+\mu)}\left[2A_6y + 12A_5x^2y -\right.$$

$$\left. -\frac{12(A_4+A_5)}{a^2\left(\frac{3}{a^4}+\frac{3}{b^4}+\frac{2}{a^2b^2}\right)}\left(\frac{3x^2y}{a^2}+\frac{y^3}{3b^2}-y\right)\right] - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}\left[2A_3y + 4A_4y^3 -\right.$$

$$\left. -\frac{12(A_4+A_5)}{b^2\left(\frac{3}{a^4}+\frac{3}{b^4}+\frac{2}{a^2b^2}\right)}\left(\frac{x^2y}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}-y\right)\right];$$

$$W = C(y^2-x^2)z + hz.$$

В этих формулах:

$$A_1=\frac{1}{6(3\lambda+2\mu)}\left[\lambda C^2-(\lambda+2\mu)\,C+\lambda-\frac{\lambda}{\mu}\delta-\frac{\lambda}{2\mu}\varkappa\right];$$

$$A_2=\frac{1}{8(3\lambda+2\mu)}\left[(\lambda-2\mu)C^2-\frac{1}{\lambda}\,(14\lambda^2+52\lambda\mu+32\mu^2)C-\right.$$
$$\left.-(11\lambda+10\mu)+\frac{8(\lambda+\mu)}{\mu}\delta-\frac{2\lambda}{\mu}\varkappa\right];$$

$$A_3=-\frac{1}{2}\mu\,Ca^2;$$

$$A_4=\frac{1}{12}\left[\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda}\mu C-\mu\frac{a^2}{b^2}+\mu+2\mu\frac{a^2}{b^2}C-\delta\right];$$

$$A_5=\frac{1}{12}\left[\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda}\mu C+\mu\frac{b^2}{a^2}-\mu+2\mu\frac{b^2}{a^2}C+\delta\right];\tag{10}$$

$$A_6=\frac{1}{2}\,\mu Cb^2;$$

$$A_7=\frac{1}{8(3\lambda+2\mu)}\left[(\lambda-2\mu)C^2+\frac{1}{\lambda}(14\lambda^2+52\lambda\mu+32\mu^2)C-\right.$$
$$\left.-(11\lambda+10\,\mu)+\frac{8(\lambda+\mu)}{\mu}\,\delta-\frac{2\lambda}{\mu}\varkappa\right];$$

$$A_8=\frac{1}{6(3\lambda+2\mu)}\left[\lambda C^2+(\lambda+2\mu)C+\lambda-\frac{\lambda}{\mu}\delta-\frac{\lambda}{2\mu}\varkappa\right];$$

$$\delta=\frac{1}{4\lambda}\,[4(\lambda+\mu)\,\varkappa-(11\,\lambda\mu+10\,\mu^2)C^2-(22\lambda\mu+20\mu^2)\,C+$$
$$+(\lambda\mu-2\mu^2)];$$

$$\varkappa=\frac{1}{4(\lambda+2\mu)}\,[(13\,\lambda\mu+20\,\mu^2)\,C^2+(11\,\lambda\mu+4\,\mu^2)].$$

Постоянная h в выражении для W определяется из условия

$$\iint Z_z\,dx\,dy=0.$$

Переходя к координатам начального состояния ξ, η, ζ

$$\xi=x-u,$$
$$\eta=y-v,$$
$$\zeta=z-w$$

и учитывая формулы (5), получаем:

$$u=-\tau\eta\zeta-\frac{1}{2}\tau^2\xi\zeta^2+\tau^2A\xi^3+\tau^2B\xi\eta^2;$$
$$v=\tau\xi\zeta-\frac{1}{2}\,\tau^2\eta\zeta^2+\tau^2D\xi^2\eta+\tau^2E\eta^3;\tag{11}$$
$$w=\tau C\xi\eta+\tau^2h\zeta.$$

В этих формулах A, B, D, E — некоторые константы, зависящие от λ, μ, a, b.

Формулы (11) показывают, что при учете в задаче кручения эллиптического цилиндра членов порядка τ^2 радиусы поперечных сечений изменяют свою длину и, вообще говоря, искривляются; длина стержня уменьшается; добавочного искажения первоначально плоского поперечного сечения не возникает. Жесткость также не изменяется.

4. Полагая $a=b$ (или $C=0$), мы получаем решение задачи о кручении круглого цилиндра с учетом членов порядка τ^2, данное П. М. Риз ([2]). В этом случае искривление радиусов исчезает.

Поступило
19 XII 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Seth, Phil. Trans. Roy. Soc., A **234**, 231 (1935). [2] П. М. Риз, ДАН, XX, № 4 (1938). [3] Murnaghan, Amer. Journ. of Math., LIX, № 2 (1937). [4] П. М. Риз и Н. В. Зволинский, ДАН, XX, № 2—3 (1938).