

В. В. СОКОЛОВСКИЙ

**ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ДАВЛЕНИЯ ЗЕМЛИ**

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 17 XII 1938)

Основными уравнениями плоской задачи теории давления земляной среды являются уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{Y} = 0 \quad (1)$$

и условие

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} - \sin \rho \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = K, \quad (2)$$

где  $\rho$  и  $K$  — соответственно коэффициенты трения и сцепления среды.

Принимая

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma [1 + \sin \rho \sin (2\varphi + \rho)] - \frac{K}{\sin \rho}, \\ \sigma_y &= \sigma [1 - \sin \rho \sin (2\varphi + \rho)] - \frac{K}{\sin \rho}, \quad \tau_{xy} = -\sigma \sin \rho \cos (2\varphi + \rho), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

подставляя их в (1) и вводя обозначения

$$\frac{\operatorname{ctg} \rho}{2} \ln \sigma + \varphi = \xi, \quad \frac{\operatorname{ctg} \rho}{2} \ln \sigma - \varphi = \eta, \quad (4)$$

получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \xi}{\partial y} \sin \varphi + \frac{1}{\sigma} A = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} \sin (\varphi + \rho) - \frac{\partial \eta}{\partial y} \cos (\varphi + \rho) + \frac{1}{\sigma} B = 0,$$

где

$$A = \frac{1}{2 \sin \rho} [\bar{X} \cos (\varphi + \rho) + \bar{Y} \sin (\varphi + \rho)], \quad B = \frac{1}{2 \sin \rho} [\bar{X} \sin \varphi - \bar{Y} \cos \varphi].$$

Если принять за независимые переменные  $\alpha$  и  $\beta$ , где  $\alpha(x, y) = \text{const}$  есть первое, а  $\beta(x, y) = \text{const}$  второе семейство характеристик (совпадающие с линиями скольжения), то получим систему уравнений\*:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \beta} \cos \varphi - \frac{\partial x}{\partial \beta} \sin \varphi &= 0, & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \sin (\varphi + \rho) + \frac{\partial x}{\partial \alpha} \cos (\varphi + \rho) &= 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{1}{\sigma \cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \beta} A &= 0, & \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \frac{1}{\sigma \sin (\varphi + \rho)} \frac{\partial x}{\partial \alpha} B &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В случае отсутствия массовых сил ( $\bar{X} = \bar{Y} = 0$ ) вместо (5) получим:

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} \cos \varphi - \frac{\partial x}{\partial \eta} \sin \varphi = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} \sin (\varphi + \rho) + \frac{\partial x}{\partial \xi} \cos (\varphi + \rho) = 0, \quad (6)$$

\*  $\varphi$  есть угол наклона линий  $\alpha = \text{const}$  к оси  $x$ .

которые с заменой переменных

$$x = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} [\cos \varphi X - \sin (\varphi + \rho) Y], \quad y = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} [\sin \varphi X + \cos (\varphi + \rho) Y]$$

приводятся к виду

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} - \frac{Y}{2 \cos \rho} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{X}{2 \cos \rho} = 0,$$

где  $\xi = \text{const}$  есть первое, а  $\eta = \text{const}$  — второе семейство характеристик.

В случае наличия массовых сил введем

$$u = \sqrt{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} R_\alpha \quad \text{и} \quad v = \sqrt{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} R_\beta,$$

где  $R_\alpha$  и  $R_\beta$  — соответственно радиусы кривизны характеристик  $\beta = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$ , получим

$$u = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sin (\varphi + \rho)} \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad v = -\frac{\sqrt{\sigma}}{\cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \beta}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\sin (\varphi + \rho)}{\sqrt{\sigma}} u, \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\frac{\cos \varphi}{\sqrt{\sigma}} v. \quad (7')$$

Воспользовавшись (5), (7'), получим основную систему уравнений в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} - e - \frac{3 \operatorname{tg} \rho (\xi + \eta)}{2} \cdot A v = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + e - \frac{3 \operatorname{tg} \rho (\xi + \eta)}{2} \cdot B u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \beta} - \operatorname{tg} \rho \frac{\partial \xi}{\partial \beta} u - \frac{1}{2 \cos \rho} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \operatorname{tg} \rho \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} v + \frac{1}{2 \cos \rho} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \beta} - \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) u = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В дальнейшем мы придем к решению задач Cauchy, Goursat и смешанной для уравнений (5), однако решение этих задач удобнее проводить для уравнений (8).

Определив  $u = u(\alpha, \beta)$ ,  $v = v(\alpha, \beta)$ , нетрудно с помощью (7') получить  $x = x(\alpha, \beta)$ ,  $y = y(\alpha, \beta)$ .

Пользуясь выведенными уравнениями, рассмотрим решение ряда основных задач теории давления земли.

Вспомнив (3), нетрудно получить напряжения.

$$\sigma_n = \sigma [1 + \sin \rho \sin (2\varphi - 2\theta + \rho)] - \frac{K}{\sin \rho}, \quad \tau_{nt} = -\sigma \sin \rho \cos (2\varphi - 2\theta + \rho), \quad (9)$$

где  $\theta$  — угол наклона нормали  $n$  к оси  $x$ .

Давление земли на подпорную стенку. Вдоль подпорной стенки, которую мы предполагаем плоской,

$$\tau_{nt} = \sigma_n \operatorname{tg} \rho_1, \quad (10)$$

где  $\rho_1$  — коэффициент трения земли о стенку.

Из (9) и (10) получим

$$\sigma = \frac{K \sin \rho_1}{\sin \rho [\sin \rho_1 + \sin \rho \cos (2\varphi - 2\theta + \rho - \rho_1)]}, \quad (11)$$

откуда видно, что

$$\sigma \geq \frac{K \sin \rho_1}{\sin \rho (\sin \rho_1 + \sin \rho)}.$$

Подставив (11) в (4), получим некоторую кривую.

Первая ветвь этой кривой будет: \*

$$\xi = \xi^*(\varphi), \quad \eta = \eta^*(\varphi) \text{ или } \eta = F_1(\xi) \text{ при } \theta - \frac{\rho}{2} + \frac{\rho_1}{2} \leq \varphi \leq \theta - \frac{\rho}{2} + \frac{\rho_1}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4}; \quad (12')$$

вторая ветвь этой кривой будет:

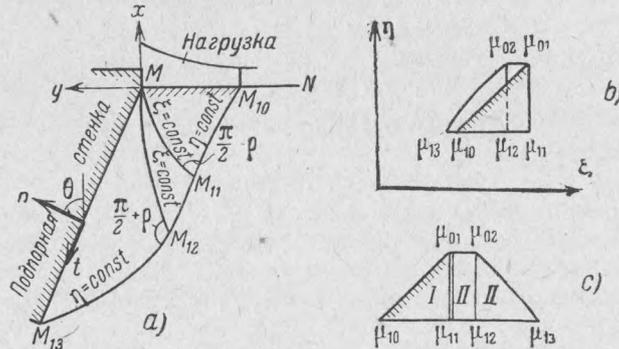
$$\xi = \xi^*(\varphi), \quad \eta = \eta^*(\varphi) \text{ или } \eta = F_2(\xi) \text{ при } \theta - \frac{\rho}{2} + \frac{\rho_1}{2} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \theta - \frac{\rho}{2} + \frac{\rho_1}{2}. \quad (12'')$$

Для сыпучей среды ( $K=0$ ) эта кривая вырождается в две прямые:

$$\eta = -2\theta + \rho - \rho_1 - \frac{\pi}{2} - \gamma + \xi, \quad \varphi = \theta - \frac{\rho}{2} + \frac{\rho_1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}, \quad (12')$$

$$\eta = -2\theta + \rho - \rho_1 + \frac{\pi}{2} + \gamma + \xi, \quad \varphi = \theta - \frac{\rho}{2} + \frac{\rho_1}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}. \quad (12'')$$

Определим активное давление земли на подпорную стенку, когда вдоль  $MN$  (фиг., а) приложена нормальная нагрузка  $\sigma_x(y)$ , причем  $\tau_{xy} = 0$  \*\*.



По формулам (3) получим

$$\left. \begin{aligned} \text{либо} \quad \varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}, \quad \sigma_x = \sigma(1 + \sin \rho) - \frac{K}{\sin \rho} \\ \text{или, обратно,} \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \frac{K}{\sin \rho}}{1 + \sin \rho} \end{aligned} \right\} \quad (13')$$

и, подставив (13') в (4),

$$\text{либо} \quad \xi = \frac{\operatorname{ctg} \rho}{2} \ln \sigma(y) + \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}, \quad \eta = -\frac{\pi}{2} + \rho + \xi, \quad (14')$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi = \frac{3\pi}{4} - \frac{\rho}{2}, \quad \sigma_x = \sigma(1 - \sin \rho) - \frac{K}{\sin \rho} \\ \text{или, обратно,} \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \frac{K}{\sin \rho}}{1 - \sin \rho} \end{aligned} \right\} \quad (13'')$$

и, подставив (13'') в (4),

$$\xi = \frac{\operatorname{ctg} \rho}{2} \ln \sigma(y) + \frac{3\pi}{4} - \frac{\rho}{2}, \quad \eta = -\frac{3\pi}{2} + \rho + \xi. \quad (14'')$$

Рассмотрим случай  $\sigma'_x(y) > 0$ , соответствующий монотонному возрастанию нагрузки вдоль оси  $y$  (фиг., а).

Разберем сперва поставленную задачу при отсутствии массовых сил ( $\bar{X} = \bar{Y} = 0$ ).

Плоскость  $(\xi, \eta)$  состоит из двух наложенных друг на друга листов.

\*  $\gamma = \arcsin \frac{\sin \rho_1}{\sin \rho}$ , берем  $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ .

\*\* Предполагается, что  $\sigma_x(y)$  имеет непрерывную производную; случай, когда  $\tau_{xy} \neq 0$ , может быть также разобран.

Прямая  $\nu_{01}\nu_{10}$  есть изображение (14') на верхнем листе, вдоль нее будем иметь\*:

$$[x]=0, [y]=y, \left[\frac{\partial x}{\partial \xi}\right] = -\frac{1+\sin \rho}{2 \cos \rho \xi'(y)}, \left[\frac{\partial x}{\partial \eta}\right] = \frac{1+\sin \rho}{2 \cos \rho \eta'(y)}, \quad (15)$$

где  $\xi(y)$  и  $\eta(y)$  даны формулами (14').

Решая задачу Cauchy для уравнений (6), определим  $x, y$  в треугольнике  $\nu_{01}\nu_{11}\nu_{10}$  и следовательно вдоль  $\nu_{01}\nu_{11}$ .

Склеим оба листа плоскости  $(\xi, \eta)$  вдоль отрезка характеристики  $\nu_{01}\nu_{11}$ .

На нижнем листе строим кривую (12''), пересечения которой с характеристиками  $\eta = \text{const}$ , проходящими через точки  $\nu_{01}$  и  $\nu_{10}$ , дадут точки  $\nu_{02}$  и  $\nu_{13}$ . Отрезку характеристики  $\nu_{01}\nu_{02}$  соответствует на плоскости  $(x, y)$  одна точка  $M$  с координатами  $(0, 0)$ , поэтому вдоль  $\nu_{01}\nu_{02}$  полагаем

$$x=0, y=0. \quad (16)$$

Решая задачу Goursat для уравнений (6) по значениям вдоль  $\nu_{01}\nu_{11}$  и  $\nu_{01}\nu_{02}$ , на нижнем листе определим  $x, y$  в прямоугольнике  $\nu_{01}\nu_{11}\nu_{12}\nu_{02}$ , а следовательно и вдоль  $\nu_{02}\nu_{12}$ .

Вдоль  $\nu_{02}\nu_{13}$  имеет место

$$x + \text{tg } \theta y = 0. \quad (16')$$

Решая смешанную задачу для уравнений (6), определяем в треугольнике  $\nu_{02}\nu_{12}\nu_{13}$

$$x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta). \quad (17)$$

Двулистная область, изображенная на фиг., б, может быть получена перегибанием вокруг  $\nu_{01}\nu_{11}$  области, изображенной на фиг., с. Поэтому построение решений на двух плоскостях, как это было проведено выше, можно выполнить в соответствующих треугольниках и прямоугольнике фиг., с\*\*.

Обращая функции (17), будем иметь

$$\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y). \quad (18)$$

Нами доказано следующее предложение:

Функции (18) до линии разрыва  $\frac{\partial D(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \infty$ , соответствующей трещинам, однозначны.

Подставив значения (18) вдоль  $MM_{13}$

$$\xi(x, -\text{ctg } \theta x) = \xi^*(x) \quad \eta(x, -\text{ctg } \theta x) = \eta^*(x)$$

в (4), получим

$$\sigma = \sigma^*(x), \varphi = \varphi^*(x),$$

а вслед затем по формулам (9) определим:

$$\sigma_n = \sigma_n^*(x), \tau_{nt} = \tau_{nt}^*(x). \quad (19)$$

Обобщим приведенное решение на случай наличия массовых сил (учитывается вес земли).

Характеристиками в этом случае будут  $\alpha = \text{const}$  и  $\beta = \text{const}$ .

Рассматриваем теперь плоскость  $(\alpha, \beta)$ , как состоящую из двух листов, наложенных друг на друга. В выборе  $\alpha$  и  $\beta$  существует известный произвол, который нами будет использован.

На верхнем листе выберем  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы вдоль  $MM_{10}$  они совпадали с (14'):

$$\alpha = \alpha(y) = \xi(y), \beta = -\frac{\pi}{2} + \rho + \alpha. \quad (20)$$

\* [ ] обозначают, что функция взята на линии  $\nu_{01}\nu_{10}$ .

\*\* Соответствующие точки  $\nu_{ik}$  обозначены на фиг., б и с одинаково.

Изображение (20) на верхнем листе  $(\alpha, \beta)$  совпадает с изображением (14') на  $(\xi, \eta)$  (фиг., b), вдоль которой будем иметь

$$\left. \begin{aligned} [x] = 0, [y] = y, [\xi] = \xi(y), [\eta] = -\frac{\pi}{2} + \rho + \xi(y), \\ \left[ \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right] = -\frac{1 + \sin \rho}{2 \cos \rho \xi'(y)}, \left[ \frac{\partial x}{\partial \beta} \right] = \frac{1 + \sin \rho}{2 \cos \rho \eta'(y)}, \left[ \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \right] = 1 + \frac{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} \right)}{\cos \rho \operatorname{ctg} \rho \sigma'(y)} A, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \beta} = 1 - \frac{2 \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right)}{\cos \rho \operatorname{ctg} \rho \sigma'(y)} B. \end{aligned} \right\} (21)$$

Склеив оба листа вдоль отрезка  $\nu_{01} \nu_{11}$  и пользуясь оставшимся произволом в выборе  $\alpha$ , на нижнем листе можно достигнуть совпадения уравнения кривой  $\nu_{01} \nu_{13}$  с (12''), т. е. того, чтобы  $\beta = F_2(\alpha)$ .

Пересечения этой кривой с характеристиками  $\beta = \text{const}$ , проходящими через  $\nu_{01}$  и  $\nu_{10}$ , дадут точки  $\nu_{02}$  и  $\nu_{13}$ .

Вдоль отрезка  $\nu_{01} \nu_{02}$  характеристики  $\beta = \eta(0)$  положим  $\alpha = \xi$ .

Таким образом

$$\text{вдоль } \nu_{01} \nu_{02} \quad x = 0, y = 0, \xi = \alpha, \quad (22)$$

$$\text{вдоль } \nu_{02} \nu_{13} \quad x + \operatorname{tg} \theta y = 0, \xi = \xi(y), \eta = F_2(\xi). \quad (22')$$

Все точки  $\nu_{ik}$  на плоскости  $(\alpha, \beta)$  совпадают с соответствующими точками на плоскости  $(\xi, \eta)$ .

Поэтому, решая задачи Cauchy, Goursat и смешанную для уравнений (5), в тех же областях, как и для случая отсутствия массовых сил, получим в треугольнике  $\nu_{02} \nu_{12} \nu_{13}$

$$x = x(\alpha, \beta), y = y(\alpha, \beta), \xi = \xi(\alpha, \beta), \eta = \eta(\alpha, \beta). \quad (23)$$

Обратив первые две функции (23), будем иметь

$$\alpha = \alpha(x, y), \beta = \beta(x, y). \quad (24)$$

Нами доказано следующее предложение:

Функции (24) до линии разрыва  $\frac{D(\alpha, \beta)}{D(x, y)} = \infty$ , соответствующей трещинам, однозначны.

Все дальнейшие рассуждения остаются теми же.

Совершенно аналогично решается задача для случаев  $\sigma'_x(y) < 0$  и  $\sigma_x = \text{const}$ .

Если нагрузка состоит из нескольких участков, на каждом из которых она изменяется монотонно, плоскости  $(\xi, \eta)$  и  $(\alpha, \beta)$  будут многolistными, а остальные рассуждения аналогичны приведенным выше.

Для определения пассивного давления земли следует брать вместо (12'') и (14') соответственно (12') и (14'').

Изложенным в этой заметке способом могут быть даны решения ряда других задач теории давления земли.

Математический институт им. В. А. Стеклова.  
Академия Наук СССР.

Поступило  
19 XII 1938.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

A. N a d a i, Plastizität und Erddruck, Handbuch d. Physik (1928).