Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 4

МАТЕМАТИКА

Х. СМОЛИЦКИЙ

О ФУНКЦИЯХ LE ROY, POINCARÉ И СТЕКЛОВА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 28 XII 1938)

1. В заметке «К вопросу о тождественности функций Le Roy, Poincaré и Стеклова», напечатанной в «Докладах АН СССР» за 1937 г., т. XVI, № 1, мною было установлено, что функции Le Roy, Poincaré и Стеклова совпадают только для замкнутых выпуклых поверхностей (без плоских участков), удовлетворяющих уравнению:

$$\cos(r_{32}n_3)\cos(r_{21}n_2)\cos(r_{13}n_1)-\cos(r_{31}n_3)\cos(r_{23}n_2)\cos(r_{12}n_1)=0. \quad \text{(A)}$$

При этом (1), (2), (3) точки на поверхности n_1, n_2, n_3—внешние нормали в этих точках, r_{32}, r_{21} и т. д. — направления от точек второго индекса к точкам первого индекса.

Требование отсутствия плоских участков вытекало из требования, чтобы $\cos(r_{21}n_2)\neq 0$ для всякой пары точек поверхности. Поэтому требование отсутствия плоских участков нужно заменить более жестким требованием, именно требованием отсутствия прямолинейных участков.

Легко проверить, что сфера и эллипсоид удовлетворяют уравнению (A). В этой заметке покажем, что уравнению (A) удовлетворяет только эллипсоид, в частности сфера.

2. Покажем для этого, что всякое плоское сечение поверхности есть эллипс.

Возьмем какое-нибудь плоское сечение и выберем на нем две произвольные точки. Одну из них возьмем за начало координат, прямую, соединяющую выбранные точки,—за ось Z, плоскость сечения — за плоскость YOZ. Выбранные точки имеют координаты $(o, o, o,)$, (o, o, c). Пусть направляющие cosinus'ы нормалей в этих точках будут (α, β, γ) и $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. Так как поверхность должна быть выпуклой, то легко видеть, что $\gamma\neq 0$, $\gamma_1\neq 0$. Пусть уравнение искомой поверхности будет $\varphi(x, y, z)=0$. Рассмотрим три точки на поверхности:

I — (o, o, o) направляющие cosinus'ы нормали (α, β, γ)

II — (o, o, c) » » » $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$

III — (x, y, z) » » » $\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$,

где

$$\Delta=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Составим уравнение (A) для этих трех точек:

$$\cos(r_{32}n_3)=\frac{1}{\Delta\cdot r_{32}}\left[x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(z-c)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right] \qquad \cos(r_{31}n_3)=\frac{1}{\Delta\cdot r_{31}}\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

$$\cos(r_{21}n_2)=\gamma_1 \qquad \cos(r_{23}n_2)=-\frac{1}{r_{23}}[\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1(z-c)]$$

$$\cos(r_{13}n_1)=-\frac{1}{r_{13}}(\alpha x+\beta y+\gamma z) \qquad \cos(r_{12}n_1)=-\gamma$$

Подставляя в уравнение (A), после сокращений получаем:

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x}(Kx+Ly+2z\gamma\gamma_1-c\gamma\gamma_1)+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}(Kx+Ly+2z\gamma\gamma_1-c\gamma\gamma_1)+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial z}[z(Kx+Ly+2z\gamma\gamma_1-c\gamma\gamma_1)-c\gamma_1(\alpha x+\beta y+\gamma z)]=0,$$

где $K=\gamma\alpha_1+\gamma_1\alpha$, $L=\gamma\beta_1+\gamma_1\beta$.

Дифференциальные уравнения характеристических линий будут:

$$\frac{dx}{x(Kx+Ly+2z\gamma\gamma_1-c\gamma\gamma_1)}=\frac{dy}{y(Kx+Ly+2z\gamma\gamma_1-c\gamma\gamma_1)}=$$
$$=\frac{dz}{z(Kx+Ly+2z\gamma\gamma_1-c\gamma\gamma_1)-c\gamma_1(\alpha x+\beta y+\gamma z)}.$$

Первыми интегралами системы будут:

$$\frac{x}{y}=c_1 \quad \text{и} \quad \frac{\gamma(\alpha x+\beta y+\gamma z)(c\gamma_1-\alpha_1 x-\beta_1 y-\gamma_1 z)}{y^2}=c_2,$$

откуда характеристические линии будут:

$$x=c_1 y,\qquad \gamma(\alpha x+\beta y+\gamma z)(c\gamma_1-\alpha_1 x-\beta_1 y-\gamma_1 z)=c_2 y^2.$$

Выбранное нами сечение $x=0$ есть характеристическая линия и определяется уравнением $\gamma(\beta y+\gamma z)(c\gamma_1-\beta_1 y-\gamma_1 z)=c_2 y^2$, т. е. представляет кривую второго порядка или совокупность двух прямых, что исключено, так как поверхность не должна иметь прямолинейных участков.

Так как точки (o, o, o) и (o, o, c) являются особыми точками дифференциального уравнения (через эти точки проходят все характеристические линии), то нужно доказать, что сечение есть одна целая кривая второго порядка, а не составлена из дуг двух различных кривых, соединенных плавно в точках (o, o, o) и (o, o, c). Доказательство этого следует из того, что на нашем сечении точки (o, o, o) и (o, o, c) выбирались произвольно, и поэтому любой участок сечения есть дуга одной и той же кривой второго порядка. Так как сечение должно быть замкнутым и выпуклым, то оно есть эллипс, т. е. все плоские сечения искомой поверхности есть эллипсы. Отсюда легко установить, что поверхность есть эллипсоид и в частности сфера.

Таким образом сферические функции и функции Lamé являются единственными функциями, являющимися одновременно функциями Le Roy, Poincaré и Стеклова.

Поступило
28 XII 1938.