Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 1

МАТЕМАТИКА

Академик С. БЕРНШТЕЙН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЯДА ФУНКЦИЙ ПО ЭКСТРЕМУМАМ ЕГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Рассмотрим последовательность непрерывных * функций $\varphi_n(x)$ не отрицательных в точках x замкнутого множества E, достигающих максимума 1 в одной и той же точке $a \subset E$ множества E и удовлетворяющих условию, что

$$\varphi_n(x) \geqslant \varphi_{n+1}(x) \geqslant 0 \tag{1}$$

во всех точках $x \subset E$.

Пусть $f(x)$ будет какая-нибудь функция, выраженная рядом

$$f(x) = \sum_1^\infty b_n \varphi_n(x), \tag{2}$$

сходящимся при $x = a$, так что по теореме Абеля ряд (2) равномерно сходится во всех точках $x \subset E$. Пусть $\varepsilon_n N_n$ будет (абсолютный) экстремум на множестве E остатка

$$R_n(x) = \sum_{n+1}^\infty b_k \varphi_k(x),$$

где $N_n \geqslant 0$, $\varepsilon_n = \pm 1$ (т. е. существуют точки, где $\varepsilon_n R_n(x) = N_n$, но нет точек, где $|R_n(x)| > N_n$).

В таком случае имеет место

Теорема I. *Не может быть более одной функции вида* (2), *у которой экстремумы всех остатков* ($n \geqslant 0$) *имели бы данные значения* $\varepsilon_n N_n$ *на множестве* E.

В самом деле, составляя разность между двумя функциями, соответствующими равным экстремумам $\varepsilon_n N_n$ всех последовательных остатков, получим функцию

$$F(x) = \sum_1^\infty a_n \varphi_n(x),$$

* Условие непрерывности, как и условие замкнутости множества E, вводится лишь для упрощения изложения.

которая будет обладать свойством, что для каждого n либо будут точки ξ_n и ξ'_n множества E, где

$$\rho_n(\xi_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \varphi_k(\xi_n) > 0, \; \rho_n(\xi'_n) < 0,$$

либо будет по крайней мере одна точка x_n, где $\rho_n(x_n) = 0$ при $\varphi_{n+1}(x_n) > 0$. Но, с другой стороны, так как $\lim\limits_{n=\infty} \rho_n(a) = 0$, можем указать [если только $F(x)$ не равна тождественно нулю] такое значение n, что

$$|\rho_n(a)| > |\rho_{n+h}(a)|$$

при любых $h > 0$. Кроме того имеем вообще

$$\rho_n(x) = \rho_n(a)\varphi_{n+1}(x) + \rho_{n+1}(a)[\varphi_{n+2}(x) - \varphi_{n+1}(x)] + \\ + \rho_{n+2}(a)[\varphi_{n+3}(x) - \varphi_{n+2}(x)] + \ldots \text{ [так как } a_{n+1} = \rho_n(a) - \rho_{n+1}(a)]. \quad (3)$$

Следовательно

$$|\rho_n(x) - \rho_n(a)\varphi_{n+1}(x)| < |\rho_n(a)|\varphi_{n+1}(x)$$

для всех $x \subset E$, где $\varphi_{n+1}(x) > 0$; а потому во всех этих точках мы имели бы

$$\rho_n(x) \cdot \rho_n(a) > 0,$$

что исключает существование точек x_n, где $\rho_n(x_n) = 0$ [при $\varphi_{n+1}(x_n) > 0$], как и точек ξ_n и ξ'_n, где $\rho_n(\xi_n) \cdot \rho_n(\xi'_n) < 0$.

Эта теорема единственности должна быть дополнена теоремой существования. В данном случае (в отличие от соответствующей теоремы теории наилучших приближений, данной мною в другом месте *) нельзя указать простого необходимого и достаточного условия, которому должна удовлетворять последовательность экстремумов $\varepsilon_n N_n$ для того, чтобы существовала функция вида (2), соответствующая ей. Однако, применяя рассуждение, аналогичное указанному в вышеупомянутой заметке, легко доказывается следующая

Теорема II. *Какова бы ни была монотонно стремящаяся к нулю бесконечная последовательность чисел $N_0 \geqslant N_1 \geqslant \ldots \geqslant N_n \geqslant N_{n+1} \geqslant 0$, существует (единственная) функция*

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} b_n \varphi_n(x),$$

у которой последовательные остатки

$$R_n(x) = \sum_{n+1}^{\infty} b_k \varphi_k(x)$$

имеют экстремумы, равные $\varepsilon_n N_n$, каковы бы ни были данные $\varepsilon_n = \pm 1$ [из доказательств будет видно, что при этом ни один из остатков $R_n(x)$ не может иметь одновременно экстремумом $+N$ и $-N$).

Действительно, если

$$f_1(x) + \lambda f_2(x) = \sum_{1}^{\infty} (b'_n + \lambda b''_n)\varphi_n(x)$$

---

* Comptes Rendus, 1938, «Sur le problème inverse de la théorie de la meilleure approximation», t. 206.

и

$$F_n(\lambda) = \text{максимум} \left| \sum_{n+1}^{\infty} (b'_k + \lambda b''_k)\, \varphi_k(x) \right|,$$

то $F_n(\lambda)$ является **конвексной** функцией параметра λ. Положим в частности, что функция $f_1(x)$ такова, что $b'_k = 0$ при $k \leqslant n+1$, $F_{n+1}(0) \leqslant N_n$ и $f_2(x) = \varphi_{n+1}(x)$. В таком случае

$$F_n(0) = F_{n+1}(0),$$

поэтому уравнение

$$F_n(\lambda) = \text{максимум} \left| \lambda \varphi_{n+1}(x) + \sum_{n+2}^{\infty} b'_k\, \varphi_k(x) \right| = A \tag{4}$$

будет иметь для всякого $A > F_{n+1}(0)$ одно положительное решение $\lambda_{n+1} > 0$ и одно отрицательное решение $\lambda'_{n+1} < 0$, причем вследствие $\varphi_{n+1}(x) \geqslant 0$

$$\text{экстремум} \left(\lambda_{n+1}\, \varphi_{n+1}(x) + \sum_{n+2}^{\infty} b'_k\, \varphi_k(x) \right) = A,$$

$$\text{экстремум} \left(\lambda'_{n+1}\, \varphi_{n+1}(x) + \sum_{n+2}^{\infty} b'_k\, \varphi_k(x) \right) = -A.$$

В случае $A = F_{n+1}(0)$ уравнение (4) имело бы решение $\lambda = 0$ и еще одно решение знака, противоположного экстремуму

$$\sum_{n+2}^{\infty} b'_k\, \varphi_k(x),$$

если последний достигается только с одним знаком.

Таким образом всегда найдется одно значение $c_{n+1} \geqslant 0$ такое, что

$$\text{экстремум} \left(\varepsilon_n\, c_{n+1}\, \varphi_{n+1}(x) + \sum_{n+2}^{\infty} b'_k\, \varphi_k(x) \right) = \varepsilon_n N_n;$$

при этом c_{n+1} могло бы быть равно нулю только при $N_n = F_{n+1}(0)$. Повторяя то же рассуждение, получим функцию

$$f^{(n)}(x) = \sum_{0}^{n} \varepsilon_i\, c_{i+1}\, \varphi_{i+1}(x) + \sum_{n+2}^{\infty} b'_k\, \varphi_k(x),$$

у которой первые $\overline{n+1}$ остатки $R_i(x)$ имеют экстремумы, соответственно равные $\varepsilon_i N_i$ (так как в силу вышесказанного $c_{i+1} = 0$ только при $\varepsilon_i N_i = \varepsilon_{i+1} N_{i+1}$ и при $c_{i+1} > 0$ экстремум $R_i(x)$ достигается лишь с одним знаком, следовательно экстремумы всех остатков, отличных от

$$\sum_{n+2}^{\infty} b'_k\, \varphi_k(x),$$

достигаются лишь с одним знаком).

Пусть в частности $f_1(x) = 0$, тогда

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i\, c_{i+1}\, \varphi_{i+1}(x)$$

будет полиномом, и нам остается доказать, что при $n \to \infty$ $f^{(n)}(x)$ равномерно приближается к определенному пределу $f(x)$. Действительно, положим

$$f^{(n+k)}(x) - f^{(n)}(x) = \sum_{1}^{n+k+1} a_i \varphi_i(x), \quad (k > 0),$$

$$\rho_m(x) = \sum_{m+1}^{n+k+1} a_i \varphi_i(x) \quad (m \geqslant 0).$$

В таком случае $|\rho_m(x)| \leqslant N_m \leqslant N_n$ при $m > n$. Поэтому на основании рассуждения, сделанного при доказательстве теоремы I, при всех $m \leqslant n$ должно соблюдаться неравенство

$$|\rho_m(a)| \leqslant N_n,$$

откуда вследствие (3)

$$|\rho_m(x)| \leqslant 2N_n$$

при любом x, и в частности, полагая $m = 0$, получаем неравенство

$$|f^{(n+k)}(x) - f^{(n)}(x)| \leqslant 2N_n,$$

из которого заключаем, что $f^{(n)}(x)$ равномерно стремится к некоторой функции $f(x)$ вида (2), удовлетворяющей условиям теоремы.

Имея в виду один из важнейших случаев применения доказанных теорем, когда $\varphi_n(x) = x^n$, усилим условие (1) условием

$$\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x) \geqslant \varphi_{n+1}(x) - \varphi_{n+2}(x) \geqslant 0. \tag{5}$$

В таком случае имеет место

Теорема III. *Функция $f(x)$ вида (2), у которой последовательные остатки имеют экстремумы, равные $(-1)^{n+1} N_n$, где $N_n \geqslant N_{n+1}$, равна* [при условии (5)]

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} [N_n + N_{n+1}] \varphi_{n+1}(x);$$

при этом все экстремумы достигаются при $x = a$.

Действительно, в точке a все остатки $R_n(x)$ получают значения $(-1)^{n+1} N_n$; поэтому нужно лишь проверить, что при всех $x \subset E$, $|R_n(x)| \leqslant N_n$.

Для этого замечаем, что, вследствие (5),

$$N_n \varphi_{n+1}(x) \leqslant (-1)^{n+} R_n(x) = N_n \varphi_{n+1}(x) + N_{n+1}\Big(\varphi_{n+1}(x) - \varphi_{n+2}(x)\Big) -$$
$$- N_{n+2}\Big(\varphi_{n+2}(x) - \varphi_{n+3}(x)\Big) + \ldots = N_n \varphi_n(x) - N_n\Big(\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)\Big) +$$
$$+ N_{n+1}\Big(\varphi_{n+1}(x) - \varphi_{n+2}(x)\Big) + \ldots + \ldots \leqslant N_n \varphi_n(x).$$

Поступило
27 XI 1938.