Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. С. КУКЛЕС, Н. С. ПИСКУНОВ

ОБ ИЗОХРОННОСТИ КОЛЕБАНИЙ ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ И НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 14 XI 1937)

Рассмотрим уравнение колебаний с одной степенью свободы

$$\frac{d^2x}{dt^2}+F\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=0. \tag{1}$$

Обозначим $\frac{dx}{dt}=v$, вследствие чего уравнение примет вид:

$$\frac{dv}{dx}+\frac{F(x,v)}{v}=0;\ \frac{dx}{dt}=v. \tag{2}$$

Предполагая начало координат фокусом или центром, найдем период колебаний, изображаемых системой (2), т. е. время полного оборота изображающей точки около начала на плоскости (x, v). Мы увидим, что этот период T, вообще говоря, будет функцией начальных данных, т. е. амплитуды a или начальной скорости α. Колебания, при которых период T не зависит от начальных данных, будем называть изохронными.

Будем различать три степени изохронности.

1) Слабая изохронность, т. е. T не зависит от начальных данных.

2) Сильная изохронность—при выполнении слабой изохронности дополнительно имеет место независимость от начальных данных времени обращения изображающей точки при полярном угле, меняющемся от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

3) Совершенная изохронность: угловые скорости изображающих точек, находящихся на одном и том же радиусе-векторе, равны.

Теорема 1. *Совершенная изохронность имеет место тогда и только тогда, если* $F(x, v)=\lambda x+kv$.

Таким образом изохронность Абеля является совершенной и, наоборот, всякая совершенная изохронность для случая центра является абелевой*.

Теорема 2. *В случае фокуса может иметь место только совершенная изохронность. Таким образом в случае нелинейного фокуса изохронности быть не может**.

Теорема 3. *Если в уравнении* (1) $F(x, v)$ *вместе со своими частными производными по* x *и* v *в начале координат обращается в нуль, то период стремится к бесконечности по мере уменьшения амплитуды.*

Заметим, что в условиях этой теоремы начало может быть и фокусом и центром, однако изохронности здесь не будет.

* Теоремы 1 и 2 доказаны в предположении, что функция $F(x, v)$ является аналитической в окрестности точки 0, 0.

Теорема 4. *Для случая* $F(x, v) = f(x) + \varphi(v)$, *где* $f(x)$ *и* $\varphi(v)$ — *полиномы, сильная изохронность может иметь место только тогда, когда она является совершенной, т. е.* $f(x) = \lambda x$ *и* $\varphi(v) = av$.

Доказано также, что для случая $F(x, v) = f(x) + \varphi(v)$, где f и φ — какие-либо аналитические функции, что если имеет место изохронность в правой (или в левой) полуплоскости, то она будет иметь место и в левой (правой) полуплоскости, т. е. будет сильная изохронность.

Далее, рассматривая колебания консервативной системы, мы доказываем следующую теорему:

Теорема 5. *Для того чтобы период колебаний, определяемых уравнением* $\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0$, *был равен числу* C, *не зависящему от начальных данных, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) $f(x)$ *при малых* $x > 0$ *непрерывна и положительна.*

2) *Наименьший предел* $\liminf\limits_{t \to 0} \left| \frac{f(t)}{t} \right| \neq 0$.

3) *Имеет место неравенство:*

$$C \geqslant \limsup_{t \to 0} \frac{\pi}{\sqrt{\frac{f(t)}{t}}}. \tag{3}$$

4) *Имеет место равенство:*

$$f(-x) = \frac{d}{dx} \left\{ \left[\left(\int_0^x f(\alpha)\, d\alpha \right)^{-1} - \frac{C}{\pi} \sqrt{2x} \right]^{-1} \right\}.$$

(Показатель —1 здесь означает обращение функции, причем это обращение будет однозначным в силу монотонности $\int_0^x f(\alpha)\, d\alpha$ при малых положительных x.)

Таким образом в силу этой теоремы мы можем произвольно задать функцию $f(x)$ при $x > 0$, лишь бы она удовлетворяла условиям 1) и 2), и затем продолжить ее единственным образом [в силу условия 4)] в сторону отрицательных x так, чтобы имела место изохронность, причем период колебаний может быть равен произвольному числу C, удовлетворяющему неравенству 3).

Доказано, что определенная таким образом функция $f(x)$ будет иметь разрыв в точке $x = 0$, если $f(+0) \neq 0$, будет непрерывна, если $f(+0) = 0$, и будет непрерывна со своей производной, если $f(+0) = 0$, $f'(+0)$ существует и $C = \frac{2\pi}{\sqrt{f'(0)}}$. При нарушении же условия 3) изохронность невозможна ни при каком продолжении функции f.

Пример 1. Пусть $f(x) = 1$ при $x \geqslant 0$ и $C = \pi$. Для $x \leqslant 0$ находим из условия 4):

$$f(x) = x - \frac{1 \cdot 3}{2!} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4!} x^4 + \ldots$$

Теорема 6. *Для того чтобы колебания, определяемые уравнением* $\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0$, *были изохронными и функция* $f(x)$ *была в окрестности начала голоморфной, необходимо и достаточно, чтобы функция* $\left[\int_0^z f(\alpha)\, d\alpha \right]^{-1} = \Theta(z)$ *имела вид:*

$$x = \Theta(z) = \sqrt{kz} + P(z), \tag{4}$$

где k—произвольное положительное постоянное, а $P(z)$—произвольная голоморфная функция.

Иными словами, чтобы маятник был изохронным и в то же время аналитическим, необходимо и достаточно, чтобы длина дуги кривой, по которой двигается маятник, выражалась через ординату z соотношением (4).

Пример 2. Пусть $x = \Theta(z) = \sqrt{2z} + z$.

Находим: период $T = 2\pi$ и

$$f(x) = x - \frac{1\cdot 3}{2!}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4!}x^4 + \ldots = 1 - \left(1 + 2x\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Эта функция $f(x)$ осуществляет нелинейный (неабелев) изохрон. маятник.

Мы видим, что консервативные колебания могут обладать слабой изохронностью, однако сильной изохронностью, как это вытекает из теоремы Абеля, они могут обладать только в линейном случае. Неконсервативные колебания могут обладать и сильной изохронностью, как это показывают следующие теоремы:

Теорема 7. *В уравнении* $\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{f(x) + \varphi^2\varphi(x) + \varphi^4(x)}{\varphi}$ *существует для всякой* $f(x)$ $[f'(0) > 0]$ *и всякой* $\psi(x)$: а) *сколько угодно функций* $\varphi(x)$, *осуществляющих слабую изохронность, и* b) *одна определенная функция, осуществляющая сильную изохронность, и, наоборот, та же самая теорема имеет место для функции* $f(x)$ *при произвольно заданных* φ и ψ.

Если $\psi(x) = 0$ и $\varphi(x)$ задана, то $f(x)$ для осуществления сильной изохронности находится в квадратурах, а именно:

$$f(x) = e^{-\int\limits_0^x \varphi(\alpha)d\alpha} \int\limits_0^x e^{\int\limits_0^\alpha \psi(\beta)d\beta} d\alpha. \quad (6)$$

В этом случае, если задана $f(x)$, то $\varphi(x)$ находится из соотношения:

$$\varphi(x) = -\frac{f'(x) - 1}{f(x)}. \quad (7)$$

Пример 3. Найти $f(x)$ для сильной изохронности при условии: $\psi(x) = 0$, $\varphi(x) = \lambda = \text{const}$. Из формулы (6) получаем:

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda x}).$$

При $\lambda \to 0$ получаем $f(x) = x$, т. е. линейный случай, как и следовало ожидать.

Теорема 8. *В уравнении* $\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{f(x)\Phi(\varphi)}{\varphi}$ *для всякой* $f(x)$ $[f'(0) > 0]$ *находится сколько угодно* $\Phi(\varphi)$, *осуществляющих слабую изохронность, и только одна функция* $\Phi(\varphi)$, *осуществляющая сильную изохронность, и, наоборот, та же теорема имеет место для функции* $f(x)$ *при произвольно заданной* $\Phi(\varphi)$.

Всякая функция $F(x, \varphi)$, осуществляющая сильную изохронность $(T = 1)$, может быть найдена следующим образом: беря произвольную функцию $\Pi(x, a)$, определяем функцию N при помощи соотношения:

$$N(x, a) = \left[\frac{a\,\Pi(a, a)}{a\,\Pi'_x(x, a) - \Pi(0, a)}\right]^2. \quad (8)$$

Находя из этого соотношения

$$\frac{\partial N}{\partial x} = K(x, a) \quad (8')$$

как функцию x и a, мы из обоих полученных соотношений исключаем a и находим таким образом $\frac{\partial N}{\partial x}$ как функцию N и x:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = F(x, N). \quad (9)$$

Найденная таким образом функция F является изохронной функцией, т. е. колебания, определяемые уравнением $\frac{dv}{dx} = -\frac{F(x, v^2)}{v}$, обладают сильной изохронностью.

Доказано, что всякой изохронной функции $F(x, v)$ существует соответствующая функция $\Pi(x, a)$, при помощи которой можно получить F путем описанного выше процесса.

Пример 4. Пусть $\Pi(x, a) = \Phi\left[\frac{f(x)}{f(a)}\right]$, где Φ и f—произвольные функции. Находим:

$$N = F_1\left[\frac{f(x)}{f(a)}\right]\frac{f^2(a)}{f^2(x)}.$$

Исключая $f(a)$, весьма легко получаем

$$F(x, v) = \frac{v^2}{\varphi(x)}\left[\omega\left(\frac{v}{\varphi(x)}\right) - \varphi'(x)\right], \tag{10}$$

где ω и φ—произвольные функции. Беря $\omega(\alpha) = 1 + \frac{1}{\alpha^2}$, получаем:

$$F(x, v) = \varphi(x) - v^2\left[\frac{\varphi'(x) - 1}{\varphi(x)}\right], \tag{7'}$$

т. е. формулу (7), выведенную выше.

Darboux ([1]) исследовал сильную изохронность для случая $F(x, v) = f(x) + v^2\varphi(x)$, что впрочем было уже сделано Эйлером ([3]). Haton de la Gouppillère ([2]) исследовал сильную изохронность для случая $F(x, v) = x + \varphi(v)$ и нашел, что $\varphi(v) = av$. Hadamard ([4]) дал чрезвычайно простое и изящное доказательство единственности формулы Абеля для консервативной сильной изохронности. Но Hadamard делал ограничение, как и все его предшественники, что $f(x)$ имеет конечное число максимумов вблизи начала.

В нашей работе очень легко выводится очевидная формула:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{f(\eta)}{\eta}}},$$

где η—некоторая переменная, стремящаяся к нулю вместе с a. Полагая $T = \text{const}$, мы сразу получаем, что $f(\eta) = \lambda\eta$, освободившись таким образом от ограничений Адамара и других авторов.

Упомянем еще следующее. Андронов Д. ([5]) считает, что периодические движения консервативной системы (нелинейной) неустойчивы в смысле Ляпунова, так как период зависит от начальных условий. Но как показано выше, консервативные, как и неконсервативные, нелинейные колебания могут обладать слабой изохронностью и следовательно быть устойчивыми в смысле Ляпунова. Никакой особенности в этом смысле консервативные системы по сравнению с неконсервативными не имеют.

Математический институт им. В. А. Стеклова и
Сейсмологический институт.
Академия Наук СССР.

Поступило
21 XI 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Darboux, Note à la mécanique de Despeyrous. [2] Haton de la Goupillère, Journ. de Liouville, XIII, 2-e série. [3] Julien, Les problèmes de la mécanique, 1. [4] Hadamard, Procès verbaux des séances de la Soc. des Sciences Phys. et Nat. Bordeaux (1895). [5] Д. Андронов, Доклад на Всесоюзной конференции по теории колебаний (1931).