Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 9

МАТЕМАТИКА

А. МАРКОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИНВАРИАНТА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 14 XI 1937)

1. Пусть E—произвольное множество; $\mathfrak{M}$—аддитивное семейство [1] подмножеств множества E. Элементы семейства $\mathfrak{M}$ будем называть измеримыми множествами.

Пусть μ—конечная неотрицательная вполне аддитивная функция [1] измеримого множества. Число $\mu(A)$ мы будем называть мерой множества A. Мере μ соответствуют понятия суммируемой функции и неопределенного интеграла [1].

Пусть Γ—абелево множество [2] отображений множества E в самого себя такое, что $\varphi^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$, коль скоро $A \in \mathfrak{M}$ и $\varphi \in \Gamma$. Под интегральным инвариантом относительно Γ мы будем понимать неопределенный интеграл от неотрицательной суммируемой функции f, удовлетворяющей условиям:

$$(\mu) \int\limits_A f(x)\, dx = (\mu) \int\limits_{\varphi^{-1}(A)} f(x)\, dx \qquad (A \in \mathfrak{M},\ \varphi \in \Gamma); \tag{1}$$

$$\mu\left(\mathop{\mathscr{E}}_x (f(x) = 0) \right) = 0. \tag{2}$$

2. Настоящая заметка посвящена проблеме существования интегрального инварианта. Частный случай этой проблемы, когда Γ состоит из одного взаимно однозначного отображения, рассматривался E. Hopf'ом [3], установившим некоторое, довольно сложное, необходимое и достаточное условие существования интегрального инварианта. Еще раньше G. D. Birkhoff и P. A. Smith, рассматривая этот же случай, получили очень простое достаточное условие, которое однако не является необходимым [4].

Целью настоящей заметки является установление простого необходимого и достаточного условия существования интегрального инварианта.

3. Множество, состоящее из тождественного отображення множества E и всех конечных произведений элементов Γ, будем обозначать символом $[\Gamma]$.

Теорема. *Для существования интегрального инварианта относительно Γ необходимо и достаточно, чтобы при всяком $\varepsilon > 0$ существовало $\delta > 0$ такое, что $\mu(\varphi^{-1}(A)) < \varepsilon$ при любом $\varphi \in [\Gamma]$, коль скоро $\mu(A) < \delta$, и что $\mu(B) < \varepsilon$, коль скоро $B \in \mathfrak{M}$, и для некоторого $\psi \in [\Gamma]$ соблюдается неравенство $\mu(\psi^{-1}(B)) < \delta$.*

Наметим доказательство этого результата.

4. Необходимость. Допустим, что существует интегральный инвариант

$$\mu^*(A) = (\mu) \int_A f(x)\,dx \qquad (A \in \mathfrak{M}). \tag{3}$$

Тогда, как известно (1), μ^* является конечной неотрицательной вполне аддитивной функцией измеримого множества. Из равенства (2) следует, что $\mu^*(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(A) = 0$. Согласно теореме Radon'a-Nikodym'a (1) отсюда следует, что функция μ представима под видом

$$\mu(A) = (\mu^*) \int_A f^*(x)\,dx \qquad (A \in \mathfrak{M}), \tag{4}$$

где f^*—неотрицательная функция, суммируемая по мере μ^*.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из равенства (4) следует существование $\eta > 0$ такого, что $\mu(A) < \varepsilon$, коль скоро $\mu^*(A) < \eta$. Из равенства (3) следует существование $\delta > 0$ такого, что $\mu^*(A) < \eta$, коль скоро $\mu(A) < \delta$. Пользуясь условием (1), которое переписывается под видом

$$\mu^*(A) = \mu^*(\varphi^{-1}(A)) \qquad (A \in \mathfrak{M},\ \varphi \in [\Gamma]), \tag{5}$$

нетрудно убедиться, что δ обладает требуемыми свойствами.

5. Достаточность. При фиксированном $\varphi \in [\Gamma]$ мы можем рассматривать произведение $\varphi\chi$ как фунцию переменной $\chi \in [\Gamma]$. Эту определяемую отображением φ функцию будем обозначать через $\tilde{\varphi}$, полагая

$$\tilde{\varphi}(\chi) = \varphi\chi \qquad (\varphi \in [\Gamma],\ \chi \in [\Gamma]).$$

Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ множество всех $\tilde{\varphi}$, соответствующих $\varphi \in [\Gamma]$. $\tilde{\Gamma}$ является абелевым множеством отображений множества $[\Gamma]$ в самого себя.

Мы можем поэтому применить к $\tilde{\Gamma}$ теорему существования инвариантных средних, содержащуюся в моей предыдущей заметке (2). Согласно этой теореме существует функционал M от определенной в $[\Gamma]$ переменной вещественной ограниченной функции, удовлетворяющий условиям:

$$M(g + h) = M(g) + M(h); \tag{6}$$

$$M(g) \geqslant 0, \text{ если } g(\varphi) \geqslant 0 \text{ при всяком } \varphi \in [\Gamma]; \tag{7}$$

$$M(g) = 1, \text{ если } g(\varphi) = 1 \text{ при всяком } \varphi \in [\Gamma]; \tag{8}$$

$$M(g\tilde{\varphi}) = M(g) \qquad (\varphi \in [\Gamma]). \tag{9}$$

Здесь g и h—произвольные вещественные ограниченные функции, определенные в $[\Gamma]$.

Введем обозначение

$$g_A(\varphi) = \mu(\varphi^{-1}(A)) \qquad (A \in \mathfrak{M},\ \varphi \in [\Gamma]),$$

определяя таким образом некоторую, зависящую от измеримого множества A, вещественную неотрицательную функцию g_A элемента множества $[\Gamma]$. Эта функция ограничена, так как $E \in \mathfrak{M}$ и $\mu(B) \leqslant \mu(E)$ при любом $B \in \mathfrak{M}$. Следовательно функция g_A допустима в качестве аргумента функционала M. Положим

$$\mu^*(A) = M(g_A), \tag{10}$$

определяя этим равенством вещественную функцию μ^* измеримого множества.

Из свойств (6), (7), (8) функционала M следует, что

$$\inf g \leqslant M(g) \leqslant \sup g, \tag{11}$$

откуда в силу неотрицательности всякой функции g_A следует, что функция μ^* неотрицательна.

Пусть $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$, $A \frown B = \Lambda$. При всяком $\varphi \in [\Gamma]$ имеем $\varphi^{-1}(A) \frown \varphi^{-1}(B) = \Lambda$, откуда $\mu(\varphi^{-1}(A \smile B)) = \mu(\varphi^{-1}(A) \smile \varphi^{-1}(B)) = \mu(\varphi^{-1}(A)) + \mu(\varphi^{-1}(B))$, т. е. $g_{A \smile B} = g_A + g_B$. В силу равенств (6) и (10) это дает

$$\mu^*(A \smile B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) \quad (A \in \mathfrak{M},\ B \in \mathfrak{M},\ A \frown B = \Lambda). \tag{12}$$

Допустим теперь, что выполнено условие, достаточность которого мы хотим доказать, и покажем, что тогда μ^* является интегральным инвариантом относительно Г. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ таким образом, чтобы неравенство $\mu(\varphi^{-1}(A)) < \varepsilon$ соблюдалось при всяком $\varphi \in [\Gamma]$, коль скоро $\mu(A) < \delta$. Тогда при $\mu(A) < \delta$ имеем $\sup g_A \leqslant \varepsilon$, откуда согласно (10) и (11) $\mu^*(A) \leqslant \varepsilon$. Таким образом при всяком $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\mu^*(A) \leqslant \varepsilon$, коль скоро $\mu(A) < \delta$. Отсюда следует, что $\mu^*(A) = 0$, коль скоро $\mu(A) = 0$.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов множества $\mathfrak{M}$ такую, что $A_i \frown A_j = \Lambda$ при $i \neq j$. В силу полной аддитивности функции μ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\mathop{\mathfrak{S}}_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) = 0,$$

откуда согласно только что доказанному

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*\left(\mathop{\mathfrak{S}}_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) = 0.$$

В силу (12) это дает

$$\mu^*\left(\mathop{\mathfrak{S}}_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i) + \mu^*\left(\mathop{\mathfrak{S}}_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i).$$

Таким образом функция μ^* вполне аддитивна. Так как эта функция неотрицательна и $\mu^*(A) = 0$, коль скоро $\mu(A) = 0$, то по теореме Radon'a-Nikodym'a существует неотрицательная суммируемая функция f, удовлетворяющая равенству (3).

Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ таким образом, чтобы неравенство $\mu(A) < \varepsilon$ соблюдалось, коль скоро $A \in \mathfrak{M}$ и $\mu(\varphi^{-1}(A)) < \delta$ для какого-нибудь $\varphi \in [\Gamma]$. Тогда при $\mu(A) \geqslant \varepsilon$ имеем $\inf g_A \geqslant \delta$, откуда согласно (10) и (11) $\mu^*(A) \geqslant \delta$. Таким образом при всяком $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\mu(A) < \varepsilon$, коль скоро $\mu^*(A) < \delta$. Следовательно $\mu(A) = 0$, коль скоро $\mu^*(A) = 0$. В силу соотношения (3) это дает равенство (2). Остается проверить соблюдение условия (1).

При произвольных $A \in \mathfrak{M}$, $\varphi \in [\Gamma]$, $\chi \in [\Gamma]$ имеем $g_{\varphi^{-1}(A)}(\chi) = \mu(\chi^{-1}(\varphi^{-1}(A))) = \mu((\varphi\chi)^{-1}(A)) = g_A(\tilde{\varphi}(\chi)) = (g_A\tilde{\varphi})(\chi)$. Таким образом

$$g_{\varphi^{-1}(A)} = g_A\tilde{\varphi} \qquad (A \in \mathfrak{M},\ \varphi \in [\Gamma]),$$

откуда согласно (9) и (10) получаем равенство (5). В силу (5) и (3) выполнено условие (1), что требовалось доказать.

6. В особенно важном для приложений случае, когда Г является абелевой группой взаимно однозначных отображений множества E на самого себя, наше условие существования интегрального инварианта может быть еще упрощено. Как следствие из доказанной теоремы получаем предложение:

Если Γ *является абелевой группой взаимно однозначных отображений множества* E *на самого себя, то для существования интегрального инварианта относительно* Γ *необходимо и достаточно, чтобы при всяком* $\varepsilon > 0$ *существовало* $\delta > 0$ *такое, что* $\mu(\varphi(A)) < \varepsilon$ *при всяком* $\varphi \in \Gamma$, *коль скоро* $\mu(A) < \delta$.

Институт математики и механики.
Ленинградский университет.

Поступило
14 XI 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Saks, Théorie de l'intégrale (1933), Annexe. [2] ДАН, I (X), 299—301 (1936). [3] E. Hopf, Trans. Amer. Math. Soc., **34**, 373—393 (1932). [4] G. D. Birkhoff a. P. A. Smith, Journal de Math., 9 série, **7**, 345—379 (1928).