Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 9

МАТЕМАТИКА

Н. АХИЕЗЕР

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ОДНОГО КЛАССА НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 14 XI 1937)

Пусть даны два дифференциальных оператора:

$$L = (D^2 + \alpha_1)(D^2 + \alpha_2) \ldots (D^2 + \alpha_r),$$
$$M = D(D^2 + \alpha_1)(D^2 + \alpha_2) \ldots (D^2 + \alpha_r),$$

где $D = \frac{d}{dt}$, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ суть вещественные числа, которые мы для простоты предположим различными, а в случае оператора M также отличными от нуля.

Пусть далее H_L (соответственно H_M) есть класс всех надлежащее число раз дифференцируемых комплекснозначных функций $x(t)$ с периодом 2π, для которых $f(t) = L[x]$ (соответственно $g(t) = M[x]$) остается почти всюду по модулю $\leqslant 1$.

Если $\mathcal{E}_m[x]$ есть обычное обозначение для погрешности наилучшего равномерного приближения $x(t)$ с помощью тригонометрических сумм порядка $\leqslant m$, то имеет место следующая

Теорема. *Если выполнено неравенство*

$$n^2 > \operatorname{Max}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\},$$

то

$$\mathcal{E}_{n-1}\{H_L\} = \sup_{x \subset H_L} \mathcal{E}_{n-1}[x] = \left| \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\alpha_k \omega'(\alpha_k)} \frac{2\sin^2 \frac{\pi \sqrt{\alpha_k}}{4n}}{\cos \frac{\pi\sqrt{\alpha_k}}{2n}} \right| =$$

$$= \left| \frac{E_{2r}}{(2r)!}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2r} - \frac{E_{2r+2}}{(2r+2)!}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2r+2} \sum_{k=1}^{r} \frac{\sigma_k^r}{\omega'(\alpha_k)} + \ldots \right|,$$

$$\mathcal{E}_{n-1}\{H_M\} = \sup_{\subset H_M} \mathcal{E}_{n-1}[y] = \left| \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{\sqrt{\alpha_k}\,\Omega'(\alpha_k)} \operatorname{tg} \frac{\pi\sqrt{\alpha_k}}{2n} \right| =$$

$$= \left| \frac{C_{2r+1}}{(2r+1)!}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2r+1} - \frac{C_{2r+3}}{(2r+3)!}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2r+3} \sum_{k=0}^{r} \frac{\sigma_k^{r+1}}{\Omega'(\alpha_k)} + \ldots \right|,$$

где

$$\omega(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_r),$$

$$\Omega(z) = (z-\alpha_0)(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_r) \qquad (\alpha_0 = 0),$$

а числа E_k, C_k определяются с помощью разложений (1):

$$\operatorname{tg} z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} C_{2k+1},$$

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} E_{2k}$$

(E_k — *суть числа Эйлера*).

Экстремальное равенство $\mathcal{E}_{n-1}[x] = \mathcal{E}_{n-1}\{H_L\}$, *где* $x(t) \subset H_L$ (*соответственно равенство* $\mathcal{E}_{n-1}[y] = \mathcal{E}_{n-1}\{H_M\}$, *где* $y(t) \subset H_M$), *выполняется тогда и только тогда, когда* $L[x]$ (*соответственно* $M[y]$) *почти всюду равняется функции* $e^{i\alpha}\operatorname{sign}(\sin n(t-\beta))$, *где* α, β — *вещественные константы*.

Доказательство. Пусть $x(t) \subset H_L$; тогда

$$x(t) = s_{n-1}(t) + \frac{(-1)^r}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\omega'(\alpha_j)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos ku}{k^2 - \alpha_j} - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cos ku \right\} \{ f(t+\pi-u) + f(t+\pi+u) \} \, du,$$

где $f(t) = L[x]$, A_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) — произвольные вещественные числа, а $s_{n-1}(t)$ — зависящая от чисел A_k тригонометрическая сумма порядка $\leqslant n-1$. Теперь все сводится к доказательству того, что выражение

$$\varphi(u) = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\omega'(\alpha_j)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos ku}{k^2 - \alpha_j} - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cos ku$$

при $n^2 > \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ имеет в интервале $0 < u < \pi$ всегда не более n нулей.

Для этого служат разложения ($-\pi < u < \pi$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos ku}{k^2 - \mu^2} = \frac{1}{2\mu^2} - \frac{\pi \cos \mu u}{2\mu \sin \mu\pi},$$

$$\cos \mu u = 1 - \frac{\mu^2}{2!}\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{\mu^2(\mu^2-1)}{4!}\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^4 - \frac{\mu^2(\mu^2-1)(\mu^2-2^2)}{6!}\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^6 + \ldots,$$

где μ есть произвольное вещественное или чисто мнимое число (в первом разложении должны быть вначале исключены целые значения μ).

На основании этих разложений

$$\varphi(u) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \frac{1}{k} \sin^{2k}\frac{u}{2} \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\omega'(\alpha_j) \prod\limits_{m=k}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha_j}{m^2}\right)} - \sum_{k=0}^{n-1} A_k^* \sin^{2k}\frac{u}{2},$$

и если принять за независимую переменную $\sin^2 \frac{u}{2}$, то достаточно показать, что все

$$Q_k = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\omega'(\alpha_j) \prod_{m=k}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_j}{m^2}\right)}$$

при $k^2 \geqslant n^2 > \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ имеют один и тот же знак. Но Q_k равняется значению $(r-1)$-ой производной от

$$\frac{1}{(r-1)!} \frac{1}{\prod_{m=k}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{m^2}\right)}$$

в некоторой точке ξ_k, лежащей между наибольшим и наименьшим из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, так что $\xi_k < n^2$, откуда легко заключить, что $Q_k > 0$ $(k \geqslant n)$, что и требовалось доказать.

Аналогичные соотношения имеют место для оператора M.

Экстремальная функция $\operatorname{sign}(\sin nt)$ остается та же самая и тогда, когда характеристические полиномы $\omega(z)$, $\Omega(z)$ имеют кратные корни, и в предельном случае мы получим оценки Фавара ([2]), независимо от него найденные М. Крейном и автором.

Институт математики и механики.
Харьковский университет.

Поступило
14 XI 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Nörlund, Differenzenrechnung, S. 35. [2] J. Favard, C. R. (1936); Н. Ахиезер и М. Крейн, ДАН XV, № 3 (1937).

* Заметим, что из нашего доказательства вытекает следующий факт; при нецелом λ $(0 < \lambda < n)$ уравнение

$$\cos \lambda u + a_0 + a_1 \cos u + \ldots + a_{n-1} \cos(n-1) u = 0$$

имеет в интервале $0 < u < \pi$ всегда не более n нулей.