Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 9

МАТЕМАТИКА

С. СОБОЛЕ , член-корреспондент Академии Наук СССР

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО МНОГИМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ. I.

В настоящей заметке мы рассмотрим интегродифференциальное уравнение вида:

$$u(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} t^{(0)}) = f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)}) +$$

$$+ \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \sum_{p_0, \ldots, p_n} K_{p_0, p_1 \ldots p_n}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)}) \times$$

$$\times \frac{\partial^p u(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)})}{\partial t^{(1)p_0}\, \partial x_1^{(1)p_1} \ldots \partial x_n^{(1)p_n}}\, dx_1^{(1)} \ldots dx_n^{(1)}, \tag{1}$$

$$r^{(01)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(0)} - x_i^{(1)})^2},$$

где область интегрирования представляет собой конус $n+1$-мерного пространства, основанием которого служит плоскость $t^{(1)} = 0$ и уравнение которого имеет вид:

$$t^{(1)} = t^{(0)} - r^{(01)}. \tag{2}$$

Справа суммирование распространяется на конечное число слагаемых. Обозначая через Lu операцию, выполненную над u в правой части, мы можем записать уравнение (1) в виде:

$$u = f + Lu. \tag{3}$$

На ядра $K_{p_0, \ldots, p_n}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)})$ и на свободный член f мы наложим некоторые ограничения. Рассмотрим каждое ядро $K_{p_0, \ldots, p_n}$ как функцию координат вершины и разностей значений координат обеих точек, от которых оно зависит:

$$K_{p_0, p_1, \ldots, p_n}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)};\ x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)}) =$$

$$= \overline{K}_{p_0, p_1, \ldots, p_n}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)};\ \xi_1^{(01)}, \xi_2^{(01)}, \ldots, \xi_n^{(01)}, \xi_0^{(01)}), \tag{4}$$

где $\xi_i^{(01)} = x_i^{(0)} - x_i^{(1)}$; $\xi_0^{(01)} = t^{(0)} - t^{(1)}$.

Обозначим кроме того

$$\frac{\xi_i^{(01)}}{\xi_0^{(01)}} = \eta_i^{(01)}, \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \eta_i^{(01)^2}} = \eta^{(01)}$$

$$\eta_i^{(01)} = \eta^{(01)} \sin \vartheta_1^{(01)} \ldots \sin \vartheta_{i-1}^{(01)} \cos \vartheta_i^{(01)},$$

$$\eta_{n-1}^{(01)} = \eta^{(01)} \sin \vartheta_1^{(01)} \ldots \sin \vartheta_{n-2}^{(01)} \cos \varphi^{(01)},$$

$$\eta_n^{(01)} = \eta^{(01)} \sin \vartheta_1^{(01)} \ldots \sin \vartheta_{n-2}^{(01)} \sin \varphi^{(01)},$$

и пусть

$$K_{p_0, \ldots, p_n}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)}; \;\; x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)}) =$$
$$= \overline{\overline{K}}_{p_0, \ldots p_n}(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, t^{(0)}; \;\; \eta^{(01)}, \vartheta_1^{(01)}, \ldots, \vartheta_{n-2}^{(01)}, \varphi^{(01)}, \xi_0^{(01)}). \tag{5}$$

Мы будем говорить, что ядро $\overline{\overline{K}}_{p_0, \ldots, p_n}$ является правильным ядром с показателями $\lambda_{p_0, \ldots, p_n}$ и $\mu_{p_0, \ldots, p_n}$, если удовлетворяются следующие неравенства:

при $\eta^{(01)} \leqslant \frac{2}{3}$:

$$\left| \frac{\partial^l \overline{K}_{p_0, \ldots, p_n}}{\partial t^{(0)^{\gamma_0}} \partial x_1^{(0)^{\gamma_1}} \ldots \partial x_n^{(0)^{\gamma_n}} \partial \xi_0^{(01)^{\varepsilon_0}} \partial \xi_1^{(01)^{\varepsilon_1}} \ldots \partial \xi_n^{(01)^{\varepsilon_n}}} \right| \leqslant$$
$$\leqslant M \xi_0^{(01)^{\lambda_{p_0, \ldots, p_n} - \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j}}$$

и при $\eta^{(01)} \geqslant \frac{1}{3}$: (6)

$$\left| \frac{\partial^l \overline{\overline{K}}_{p_0, \ldots, p_n}}{\partial t^{(0)^{\gamma_0}} \partial x_1^{(0)^{\gamma_1}} \ldots \partial x_n^{(0)^{\gamma_n}} \partial \xi_0^{(01)^{\varepsilon_0}} \partial \eta^{(01)^{\varepsilon_1}} \partial \vartheta_1^{(01)^{\varepsilon_2}} \ldots \partial \varphi^{(01)^{\varepsilon_n}}} \right| \leqslant$$
$$\leqslant M \xi_0^{(01)^{\lambda_{p_0, \ldots, p_n} - \varepsilon_0}} (1 - \eta^{(01)})^{\mu_{p_0, \ldots, p_n} - \varepsilon_n},$$

где

$$\lambda_{p_0, \ldots, p_n} > -n - 1 \quad \text{и} \quad \mu_{p_0, \ldots, p_n} > -1. \tag{7}$$

Можно установить, что неравенства (6) влекут за собой два других аналогичных неравенства, в которых роли точек $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)}$ и $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)}$ обмениваются местами.

Изучая интегродифференциальную операцию L, введем еще понятие об ее индексах регулярности.

Для каждого из ядер $K_{p_0, \ldots, p_n}$, входящих в состав операции, составим разность:

$$\lambda_{p_0, p_1, \ldots, p_n} + n + 1 - p. \tag{8}$$

Наименьшую из этих разностей мы обозначим через ρ_1 и будем называть первым индексом регулярности для нашей операции.

Аналогично второй индекс регулярности ρ_2 определяется как наименьшая из разностей:

$$\mu_{p_0, \ldots, p_n} + \frac{n+1}{2} - p. \tag{9}$$

Индексами регулярности уравнения (1) или (3) мы будем называть индексы регулярности операции L, входящей в его левую часть.

Пусть в операции L

$$\max p_0 = s.$$

Условимся говорить, что функция $f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)})$ принадлежит классу ε_1 для операции L, если она имеет некоторое число производных (в настоящий момент не будем уточнять, каково это число) удовлетворяющих неравенству:

$$\left| \frac{\partial^m f}{\partial t^{(0)^{\alpha_0}} \partial x_1^{(0)^{\alpha_1}} \ldots \partial x_n^{(0)^{\alpha_n}}} \right| \leqslant A t^{(0)^{s-\alpha_0+\varepsilon_1}}. \tag{10}$$

Условимся говорить, что свободный член $f\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)}\right)$ правилен для данного уравнения (1) или (3) если соблюдены следующие условия.

а) К функции f можно применить несколько раз операцию L, т. е. можно составить функции:

$$Lf,\ L^2 f, \ldots, L^g f. \tag{11}$$

б) Функция $L^g f$ принадлежит к классу ε_1, где $\varepsilon_1 > -1$.

Основной результат нашей заметки заключается в следующей теореме.

Теорема. *Если в уравнении (3) все ядра регулярны, оба индекса регулярности этого уравнения положительны, а свободный член правилен, то это уравнение разрешимо по методу последовательных приближений и имеет единственное решение*

$$u = f + \sum_{j=1}^{\infty} L^j f. \tag{12}$$

Наши рассуждения основаны на нескольких леммах, которые мы и сформулируем.

Лемма I. *Пусть функция f принадлежит классу ε_1 для операции L, тогда функция Lf, имеющая быть может несколько меньше производных, принадлежит классу $\rho_1 + \varepsilon_1$, где ρ_1 — первый индекс регулярности операции L.*

Из этой леммы следует

Лемма II. *Если первый индекс ρ_1 операции L положителен, а f — правильный свободный член, то можно указать такое целое число k, что*

$$L^k f$$

уничтожается со сколь угодно большим числом производных при $t^{(0)} = 0$ (разумеется, нужно предположить существование достаточного количества производных у f).

Первые две леммы позволяют свести уравнение (3) к такому, свободный член которого имеет нуль заданного порядка при $t^{(0)} = 0$. С этой целью нужно положить

$$u_1 = u - f - \sum_{j=1}^{k-1} L^j f. \tag{13}$$

При этом (3) заменяется эквивалентным ему уравнением

$$u_1 = L^k f + L u_1. \tag{14}$$

Далее воспользуемся еще несколькими леммами. Фундаментальную роль играет следующая:

Лемма III. *Если ядро $K^{(02)}\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)}; x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, t^{(2)}\right)$ есть регулярное ядро с показателями $\lambda^{(02)}$ и $\lambda^{(21)}$, а ядро $K^{(21)}\left(x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, t^{(2)}; x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)}\right)$ — регулярное ядро с показателями $\lambda^{(21)}$ и $\mu^{(21)}$, то интеграл*

$$K^{(01)}\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)}; x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)}\right) =$$

$$= \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{t^{(1)}+r^{(21)} \leqslant t^{(2)} \leqslant t^{(0)}-r^{(02)}} K^{(02)}\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)}; x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, t^{(2)}\right) \cdot$$

$$\cdot K^{(21)}\left(x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, t^{(2)}; x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)}\right) dx_1^{(2)} \ldots, dx_n^{(2)}\, dt^{(2)} \tag{15}$$

является в свою очередь регулярным ядром с показателями

$$\lambda^{(01)} = \lambda^{(02)} + \lambda^{(21)} + n + 1$$

и

$$\mu^{(01)} = \min\left(\mu^{(02)} + \mu^{(21)} + \frac{n+1}{2},\ \lambda^{(02)} + \mu^{(21)} + n + 1,\ \mu^{(02)} + \lambda^{(21)} + n + 1\right). \quad (16)$$

Из леммы III вытекает следующая:

Лемма IV. *Пусть L_1 — интегродифференциальная операция, индексы регулярности которой суть $\rho_1^{(1)}$ и $\rho_2^{(1)}$, а L_2 — другая операция с индексами $\rho_1^{(2)}$ и $\rho_2^{(2)}$; тогда $L_3 = L_1 L_2$ будет снова операцией рассмотренного типа с индексами $\rho_1^{(3)}$ и $\rho_2^{(3)}$, определяемыми по формулам*

$$\rho_1^{(3)} = \rho_1^{(1)} + \rho_1^{(2)},$$

$$\rho_2^{(3)} = \min\left(\rho_2^{(1)} + \rho_2^{(2)},\ \rho_1^{(1)} + \rho_2^{(2)},\ \rho_2^{(1)} + \rho_1^{(2)}\right). \quad (17)$$

Укажем еще несколько лемм.

Лемма V. *Для функции f класса $\varepsilon_1 > N$, где N — достаточно большое число, операция L, индексы которой удовлетворяют неравенствам:*

$$\rho_1 > -1, \quad \rho_2 > \frac{n-1}{2}, \quad (18)$$

эквивалентна интегральной. Иными словами, при этом

$$Lf = \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \mathbf{K}\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)};\ x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)}\right) \cdot$$
$$\cdot f\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)}\right) dx_1^{(1)}, \ldots, dx_n^{(1)}\, dt^{(1)}. \quad (19)$$

Эта лемма доказывается простым интегрированием по частям.

Лемма VI. *Если оба индекса регулярности операции L положительны, то существует такая ее степень L^h, которая эквивалентна интегральной операции для функций класса $\varepsilon_1 > N$.*

Пользуясь этим, мы можем, произведя конечное число итераций, заменить уравнение (14) интегральным уравнением типа Volterra:

$$u_1\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)}\right) =$$
$$= \sum_{j=k}^{k+h-1} L^j f + \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \mathbf{K}\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)};\ x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)}\right) \cdot$$
$$\cdot u_1\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)}\right) dx_1^{(1)}, \ldots, dx_n^{(1)}\, dt^{(1)}, \quad (20)$$

которое разрешимо по методу последовательных приближений.

Отсюда уже легко достигается доказательство основной теоремы.

Полезно отметить, что свободный член уравнения (1) будет правильным, если p_0 — постоянное, а f имеет ограниченные производные.

Во второй заметке мы покажем, что условие $\rho_2 > 0$ может быть иногда заменено условием $\rho_2 = 0$. Мы докажем также, что уравнения, где $\rho_1 = 0$ или $\rho_2 < 0$, могут не иметь решения.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
2 XI 1937.