Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 9

МАТЕМАТИКА

А. ГЕЛЬФОНД

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ НЕРАВЕНСТВА МИНКОВСКОГО

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 1 XI 1937)

Я имею в виду дать в этой заметке обобщение одной, хорошо известной теоремы Минковского.

Всегда можно решить в целых числах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ систему неравенств:

$$|\xi_\nu| \leqslant t_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \quad t_1 t_2 \ldots t_n = \Delta, \tag{1}$$

где $\xi_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\nu,\mu} x_\mu$, а $\Delta = |\alpha_{\nu,\mu}|_1^n > 0$ — детерминант системы линейных форм.

Для обобщения этой теоремы Минковского я воспользуюсь одной весьма интересной формулой, полученной C. Siegel'ем:

$$\Delta \sum{}' \prod_{\nu=1}^{n} (t_\nu - |\xi_\nu|) =$$

$$= (t_1 \ldots t_n)^2 \sum_{y_1 y_2 \ldots y_n = -\infty}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{n} \left[\frac{\sin \pi (A_{\nu,1} y_1 + \ldots + A_{\nu,n} y_n) t_\nu}{\pi (A_{\nu,1} y_1 + \ldots + A_{\nu,n} y_n) t_\nu} \right]^2, \tag{2}$$

$$\xi_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\nu,\mu} x_\mu, \quad \Delta = |\alpha_{\nu,\mu}|_1^n > 0, \quad x_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu,\mu} \xi_\nu,$$

где $A_{\nu,\mu}$ — коэффициенты обратного преобразования, а сумма слева взята по всем целочисленным решениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$ системы неравенств $|\xi_\nu| < t_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

C. Siegel использует эту формулу для доказательства рассматриваемой теоремы Минковского. Уточняя доказательство Siegel'я, можно получить теорему, несколько более общую, чем теорема Минковского.

Обозначим через $\omega(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ число решений (без одного $0, 0, \ldots, 0$) в целых числах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ системы неравенств:

$$|\xi_\nu| \leqslant t_\nu, \quad \xi_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\nu,\mu} x_\mu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

а через $\Omega(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ число решений (без одного $0, 0, \ldots, 0$) в целых числах $y_1, y_2, \ldots, y_n$ системы неравенств:

$$|\eta_\nu| < z_\nu, \quad \eta_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} A_{\mu,\nu} y_\mu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где числа $A_{\mu,\nu}$—коэффициенты преобразования

$$x_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} A_{\mu,\nu} y_\nu, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant n,$$

обратного по отношению к преобразованию

$$\xi_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\nu,\mu} x_\mu, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n.$$

В этих обозначениях имеет место неравенство:

$$\Delta[1 + \omega(t_1, t_2, \ldots, t_n)] >$$
$$> t_1 \ldots t_n \left[1 + \frac{\sin^2 \lambda\pi}{(\lambda\pi)^2} \Omega\left(\frac{\lambda}{t_1}, \frac{\lambda}{t_2}, \ldots, \frac{\lambda}{t_n}\right)\right], \tag{5}$$

где λ—любое число $0 < \lambda < 1$, а $\Delta = |\alpha_{\nu,\mu}|_1^n > 0$.

Неравенство это получается непосредственно из формулы (2), если во всех произведениях в левой части отбросить $|\xi_\nu|$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, а в правой части отбросить все члены, за исключением тех, для которых выполняются одновременно неравенства (4) при

$$z_1 = \frac{\lambda}{t_1}, \quad z_2 = \frac{\lambda}{t_2}, \quad \ldots, \quad z_n = \frac{\lambda}{t_n}.$$

Из неравенства (5) следует обобщенная теорема Минковского.

Теорема. *Существует система целых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в совокупности отличных от нуля, удовлетворяющих системе неравенств:*

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\nu,\mu} x_\mu\right| \leqslant t_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \quad t_1 t_2 \ldots t_n \geqslant \frac{\Delta}{1 + \frac{\sin^2 \pi\lambda}{(\pi\lambda)^2} \Omega}, \tag{6}$$

где величины Δ, λ и $\Omega = \Omega\left(\frac{\lambda}{t_1}, \frac{\lambda}{t_2}, \ldots, \frac{\lambda}{t_n}\right)$ имеют установленный выше смысл.

Неравенство (5), дающее связь между числом решений неравенств (3) и (4), представляет некоторый интерес хотя бы потому, что из него непосредственно вытекает ряд теорем диофантовых приближений, например теорема, доказанная А. Хинчиным:

Если существует бесчисленное множество систем целых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, удовлетворяющих при постоянных $c_1 > 0$ и $\varepsilon > 0$ неравенству:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k \alpha_k + x_{n+1}\right| < c_1 H^{-(n+\varepsilon)}, \quad H = \max_{1 \leqslant k \leqslant n+1} |x_k|, \tag{7}$$

то существует также бесчисленное множество систем целых чисел $q, p_1, p_2, \ldots, p_n$, удовлетворяющих при некотором постоянном $c_2 > 0$ и прежнем ε совокупности неравенств:

$$\left|\alpha_k - \frac{p_k}{q}\right| < c_2 q^{-1 - \frac{n+\varepsilon}{n^2 + \varepsilon(n-1)}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Для доказательства этой теоремы положим

$$\xi_\nu = x_\nu + \alpha_\nu x_{n+1}, \quad \nu = 1, \ldots, n, \quad \xi_{n+1} = x_{n+1}; \tag{9}$$

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n = t_0, \quad t_{n+1} = T, \quad t_0 = c_2 T^{-\frac{n+\varepsilon}{n^2+\varepsilon(n-1)}},$$

$$\lambda = \frac{1}{2}.$$

Тогда мы будем иметь, что $\Delta = 1$, и далее, что

$$x_\mu = \xi_\mu - \alpha_\mu \xi_{n+1}, \quad x_{n+1} = \xi_{n+1}. \tag{10}$$

Пусть при данном H выполняется неравенство (7). Полагая тогда

$$T = (2c_2)^{\frac{n^2+\varepsilon(n-1)}{n+\varepsilon}} H^{\frac{n^2+\varepsilon(n-1)}{n}}, \tag{11}$$

мы легко убеждаемся в выполнении при достаточно большом c_2, не зависящем от H, всех условий нашей предыдущей теоремы. Действительно, число $\Omega\left(\frac{\lambda}{t_1}, \frac{\lambda}{t_2}, \ldots, \frac{\lambda}{t_{n+1}}\right)$ в данном случае есть число решений в целых числах неравенств:

$$|y_i| < \frac{1}{2t_0}, \quad i = 1, 2, \ldots n, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} y_k \alpha_k + y_{n+1}\right| < \frac{1}{2T}. \tag{12}$$

Но если неравенство (7) выполнено, то простой подсчет показывает, что так как решение неравенства (7) есть также решение неравенств (12) и кроме того неравенству (12) удовлетворяют числа, кратные числам этого решения, то число Ω при нашем выборе чисел t_0 и T будет при достаточно большом c больше, чем

$$\frac{1}{4} c_1^{-1} (2c_2)^{-n} T^{\frac{\varepsilon}{n^2+\varepsilon(n-1)}}, \quad c_2 = c_2(n, c_1, \varepsilon). \tag{13}$$

Отсюда уже непосредственно следует доказываемая теорема.

Этим же приемом можно доказать теорему А. Хинчина и в обратном направлении. Вообще говоря, наше обобщение теоремы Минковского представляет интерес в том случае, когда удастся найти или оценить снизу число $\Omega\left(\frac{\lambda}{t_1}, \ldots, \frac{\lambda}{t_n}\right)$.

Поступило
1 XI 1937.