Доклады Академии Наук СССР
1937, Том XIV, № 8

МАТЕМАТИКА

П. Т. КОРОВКИН

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ РЯДА ТЭЙЛОРА

(*Представлено академиком С. Н. Бернштейном 25 I 1937*)

Возьмем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(z), \tag{1}$$

где $p_n(z)$ — полиномы степени n:

$$p_n(z) = (z - \alpha_1^{(n)}) \ldots (z - \alpha_n^{(n)}). \tag{2}$$

В настоящей заметке мы будем исследовать сходимость ряда (1) при некоторых предположениях о законе распределения корней $\alpha_k^{(l)}$ на плоскости комплексного переменного.

I. Предположим сначала, что корни $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_n^{(n)}$ имеют конечное число точек сгущения $a_1, a_2, \ldots, a_k$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех n число точек $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_n^{(n)}$, лежащих вне окружностей с центрами $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и радиусами ε, не превосходит числа $N(\varepsilon)$. Пусть $n_i(\varepsilon)$ — число точек $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_n^{(n)}$, принадлежащих кругу $|z - a_i| \leqslant \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Предположим, что при некотором определенном ε мы имеем пределы:

$$\rho_i = \lim_{n\to\infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{n}. \tag{3}$$

Из предыдущего условия следует, что в этом случае эти пределы существуют при любом ε и не зависят от ε. Предположим наконец, что все числа $\alpha_k^{(l)}$ ограничены по модулю:

$$|\alpha_k^{(l)}| \leqslant M. \tag{4}$$

При этих предположениях нетрудно показать, что ряд (1) сходится во всякой точке, удовлетворяющей условию:

$$|(z - a_1)^{\rho_1} (z - a_2)^{\rho_2} \ldots (z - a_k)^{\rho_k}| < \frac{1}{m}, \tag{5}$$

где

$$m = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}. \tag{6}$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим общий член ряда (1):

$$c_n p_n(z) = c_n (z - \alpha_1^{(n)}) \ldots (z - \alpha_n^{(n)}) =$$
$$= c_n (z - \beta_1^{(n)}) \ldots (z - \beta_{N_n}^{(n)}) (z - \alpha_{11}^{(n)}) \ldots (z - \alpha_{1n_1}^{(n)}) \ldots (z - \alpha_{kn_k}^{(n)}),$$

где $\beta_s^{(n)}$ — точки, не принадлежащие кругам $|z - a_i| \leqslant \varepsilon$ $(i = 1, 2 \ldots k)$. Мы имеем: $N_n \leqslant N(\varepsilon)$, и в силу (4)

$$\sqrt[n]{|c_n p_n(z)|} \leqslant \sqrt[n]{|c_n|}\, (|z| + M)^{\frac{N_n}{n}} \prod_{i=1}^{k} (|z - a_i| + \varepsilon)^{\frac{n_i(\varepsilon)}{n}},$$

и следовательно:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n p_n(z)|} \leqslant m \prod_{i=1}^{k} (|z - a_i| + \varepsilon)^{\rho_i},$$

откуда и получается в виду произвольности ε наше утверждение.

Можно показать также, что если z не есть точка сгущения множества всех чисел $\alpha_k^{(l)}$ и если

$$|(z - a_1)^{\rho_1} (z - a_2)^{\rho_2} \ldots (z - a_k)^{\rho_k}| > \frac{1}{m},$$

то ряд (1) расходится в точке z.

II. Предположим теперь, что корни полиномов $p_n(z)$ вещественны и принадлежат конечному промежутку (a, b), открытому слева и замкнутому справа. Пусть $n(x)$ — число корней полинома $p_n(z)$, принадлежащих замкнутому справа промежутку $a(x)$. Мы будем предполагать, что при всяком x существует предел:

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(x)}{n}. \tag{7}$$

Функция $\rho(x)$ есть очевидно неубывающая функция от x, причем $\rho(a) = 0$ и $\rho(b) = 1$. Докажем, что при сделанных предположениях ряд (1) сходится для всех z, удовлетворяющих условию:

$$\int_a^b \ln|z - x|\, d\rho(x) < -\ln m, \tag{8}$$

где m определяется формулой (5).

Пусть $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_m = b$ и предположим, что $(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Пусть $\alpha_{ik}^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, m_i)$ — корни $p_n(z)$, принадлежащие промежутку (x_{i-1}, x_i), открытому снизу и замкнутому сверху.

Мы имеем:

$$c_n p_n(z) = c_n \prod_{i=1}^{m} \left(\prod_{k=1}^{m_i} (z - \alpha_{ik}^{(n)}) \right),$$

и, как и раньше:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n p_n(z)|} \leqslant m \prod_{i=1}^{m} (|z - \xi_i| + \varepsilon)^{\rho(x_i) - \rho(x_{i-1})},$$

где ξ_i — некоторая точка из промежутка (x_{i-1}, x_i). Следовательно:

$$\log \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n p_n(z)|} \leqslant \log m + \sum_{i=1}^{m} \log(|z - \xi_i| + \varepsilon)(\rho(x_i) - \rho(x_{i-1})).$$

Закрепляя ε в выражении $\log(|z-\xi_i|+\varepsilon)$, можем написать:

$$\log \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n p_n(z)|} \leqslant \log m + \int_a^b \log(|z-x|+\varepsilon)\, d\rho(x),$$

откуда следует, что ряд (1) сходится, если z удовлетворяет условию:

$$\int_a^b \log(|z-x|+\varepsilon)\, d\rho(x) < -\log m.$$

Устремляя ε к нулю, получаем наше утверждение, причем, если z принадлежит промежутку (a, b), то интеграл формулы (8) может иметь значение $-\infty$.

III. Можно делать и другие предположения по поводу закона распределения корней $\alpha_k^{(l)}$. Предположим, например, что все корни ограничены по модулю и что для всякого прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат

$$p \leqslant x < q, \quad p_1 \leqslant y < q_1, \tag{9}$$

существует предел

$$\rho(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\omega)}{n},$$

где $n(\omega)$ — число корней полинома $p_n(z)$, принадлежащих прямоугольнику (9). Условие (8) в этом случае принимает вид:

$$\int_\Omega \ln|z-x|\, \rho(d\omega) < -\ln m,$$

где Ω есть прямоугольник, содержащий все корни $\alpha_k^{(l)}$ и интеграл есть интеграл Riemann-Stiltjes'а.

Для случаев II и III можно доказать, как и для случая I, теоремы расходимости.

Институт математики и механики.
Ленинградский университет.

Поступило
25 I 1937.