Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 8

МАТЕМАТИКА

В. С. ИГНАТОВСКИЙ, член-корреспондент Академии Наук СССР

ПО ПОВОДУ ЛАПЛАСОВСКОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ. V.

Пусть дан лапласовский интеграл

$$f(z) = \int_a^\infty e^{-zt} F(t)\, dt, \tag{1}$$

причем a действительно и конечно.

Если интеграл (1) абсолютно сходящийся, то, как известно, будет справедлива оборачивающая формула

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} f(z)\, dz, \tag{2}$$

т. е. если ввести в (2) функцию $f(z)$, определенную на основании данной функции $F(t)$, то в случае абсолютной сходимости интеграла (1) мы снова приходим к нашей исходной функции $F(t)$.

При этом $f(z)$—регулярная аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$ во всей полуплоскости, справа от прямой $x = c$.

Если, наоборот, нам дана функция $f(z)$ и если теперь ввести в (1) функцию $F(t)$, определенную на основании (2), то мы в общем придем к нашей исходной функции $f(z)$ и (1) абсолютно сходится, если будет существовать интеграл *:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(c+iy)|\, du. \tag{3}$$

В виду того, что в применениях именно такой переход от $f(z)$ к $F(t)$ особенно важен, представляет интерес задаться такими условиями для $f(z)$, при которых подобный переход будет существовать и интеграл (1) будет при этом абсолютно сходящимся. Последнее обстоятельство дает нам, как это выше указано, возможность посредством (2) обратно перейти к $F(t)$.

* Настоящую заметку можно рассматривать как дополнение к одному результату работы Гаара (Haar) [1], стр. 73—76.

Такая полная взаимность между $f(z)$ и $F(t)$ будет всегда существовать, если $f(z)$ в упомянутой полуплоскости может быть при больших $|z|$ представлена в форме

$$f(z) = \frac{A + B \log z}{z^{\nu}} e^{-az} \tag{4}$$

при

$$\nu > 0, \tag{5}$$

причем A и B—постоянные. При этом будет

$$F(t) = 0; \quad t < a, \tag{6}$$

где с правой стороны (6) должно стоять $t \leqslant a$, если будем иметь

$$\nu > 1. \tag{7}$$

Прежде всего мы должны доказать абсолютную сходимость интеграла (1). Мы получим из (2)

$$F(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\omega}^{+\omega} e^{iyt} f(c + iy)\, dy +$$

$$+ \frac{e^{ct}}{2\pi} \left\{ \int_{\omega}^{\infty} e^{iyt} f(c + iy)\, dy + \int_{\omega}^{\infty} e^{-iyt} f(c - iy)\, dy \right\}. \tag{8}$$

Обозначим:

$$g(t) = (t - a)\, e^{ct} \int_{\omega}^{\infty} e^{iyt} f(c + iy)\, dy. \tag{9}$$

Мы получим тогда при достаточно большом ω на основании (4):

$$g(t) = A(t - a)\, e^{c(t-a)} \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{iy(t-a)}\, dy}{(c + iy)^{\nu}} = \frac{A\, e^{c(t-a)}}{i} \int_{\omega}^{\infty} \frac{d\, e^{iy(t-a)}}{(c + iy)^{\nu}}, \tag{10}$$

причем мы для простоты положили в (4) $B = 0$. Случай с $B \neq 0$ может быть аналогичным путем легко исследован. Частичное интегрирование в (10) приводит нас к

$$|g(t)| = A\, e^{c(t-a)} \left| - \frac{e^{i\omega(t-a)}}{(c + i\omega)^{\nu}} + i\nu \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{iy(t-a)}\, dy}{(c + iy)^{\nu+1}} \right| <$$

$$< A\, e^{c(t-a)} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{c^2 + \omega^2})^{\nu}} + \nu \int_{\omega}^{\infty} \frac{dy}{(\sqrt{c^2 + y^2})^{\nu+1}} \right\} = D\, e^{c(t-a)}. \tag{11}$$

Пусть значение ω, хотя и большое, но определенное. Тогда D в (11) есть постоянное и также постоянным будет и

$$M = \int_{-\omega}^{\omega} |f(c + iy)|\, dy. \tag{12}$$

Так как мы для второго члена в скобках в (8) получим результат, аналогичный (11), то потому из (8) следует

$$|(t - a) F(t)| < \frac{M}{2\pi} (t - a)\, e^{ct} + \frac{D}{\pi} e^{c(t-a)}, \tag{13}$$

а отсюда при $x > c$ получим:

$$\int_a^{\infty} e^{-xt} |(t-a) F(t)| \, dt < \frac{M}{2\pi} \frac{e^{-a(x-c)}}{(x-c)^2} + \frac{D e^{-ax}}{\pi (x-c)}. \tag{14}$$

Но так как очевидно, что

$$\int_b^{\infty} e^{-xt} |F(t)| \, dt < \int_b^{\infty} e^{-xt} |(t-a) F(t)| \, dt, \quad (b > a+1) \tag{15}$$

то поэтому мы, введя функцию

$$f_1(z) = \int_a^{\infty} e^{-zt} F(t) \, dt, \tag{16}$$

при $Re(z) = x > c$, на основании (14) и (15) заключаем, что интеграл (16) будет всегда абсолютно сходящийся при условиях (4) и (5).

Если бы кроме того было справедливо равенство $f_1(z) = f(z)$, то мы имели бы полную взаимность между $f(z)$ и $F(t)$. Последнее действительно имеет место для случая (7), так как тогда интеграл (3) существует.

Однако в применениях многие интегралы соответствуют случаю $0 < \nu \leqslant 1$, например:

$$\frac{1}{\sqrt{z^2+1}} = \int_0^{\infty} e^{-zt} J_0(t) \, dt, \tag{17}$$

где J_0 (7)—функция Бесселя нулевого порядка. Поэтому важно доказать равенство $f_1(z) = f(z)$ и для этого случая, а потому и означенную взаимность, которая имеет место и для (17).

Так как при $0 < \nu \leqslant 1$ интеграл (3) не существует, то мы для доказательства должны итти обходным путем.

Из (16) следует

$$\chi_1(z) = -\frac{df_1(z)}{dz} - a f_1(z) = \int_a^{\infty} e^{-zt} (t-a) F(t) \, dt. \tag{18}$$

Далее получим из (2) частичным интегрированием и на основании (4) и (5):

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i t} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(z) \frac{de^{zt}}{dz} \, dz = -\frac{1}{2\pi i t} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} \frac{df(z)}{dz} \, dz; \tag{19}$$

отсюда и (2) вытекает:

$$(t-a) F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} \chi(z) \, dz, \tag{20}$$

где

$$\chi(z) = -\frac{df(z)}{dz} - a f(z). \tag{21}$$

Для $\chi(z)$ получим при больших z из (4) и (5)

$$\chi(z) = \frac{e^{-az}}{z^{\nu+1}} \left\{ \nu A - B + \nu B \log z \right\} \quad (\nu > 0). \tag{22}$$

Но это как раз соответствует случаю (7). Поэтому из (20) непосредственно следует

$$\chi(z) = \int_a^\infty e^{-zt}(t-a)F(t)\,dt. \tag{23}$$

Таким образом отсюда (18) и на основании теоремы Лерха получим равенство $\chi_1(z) = \chi(z)$, т. е.

$$\frac{d\{f_1(z)-f(z)\}}{dz} + a\{f_1(z)-f(z)\} = 0. \tag{24}$$

Интегрирование приводит нас к

$$f_1(z) - f(z) = Ce^{-az}. \tag{25}$$

Однако постоянная C тут должна равняться нулю на основании двух различных соображений. Во-первых, разность двух нижних функций опять должна быть нижней функцией, но этого не будет для правой стороны (25), за исключением $C=0$. Кроме того при абсолютной интегрируемости интеграла (1) произведение $f(z)e^{az}$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$ в пределах упомянутой полуплоскости. Таким образом мы доказали существование полной взаимности между $f(z)$ и $F(t)$ при условиях (4) и (5).

Институт математики и механики.
Государственный университет.
Ленинград.

Поступило
3 II 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Haar, Mathem. Ann., **96** (1927).