Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 6

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРЫ, НАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Н. А. СЛЕЗКИН

(*Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 26 XII 1936*)

До сих пор рассматривалось вращение сферы с вязкой жидкостью либо под действием восстанавливающего момента (Гельмгольц, Любек, Жуковский и др.), либо под действием постоянного момента, либо с постоянной угловой скоростью. В настоящей заметке мы предлагаем решение задачи в том случае, когда кроме восстанавливающего момента действует момент внешнего сопротивления и возмущающий периодический момент. Мы применяем тот метод решения, о котором указали в нашей заметке (1).

Предположим, что сфера, заполненная вязкой жидкостью, вращается вокруг одного из своих диаметров под действием пары с моментом

$$N(t, \varphi, \Omega) = C + A\cos mt - \alpha\varphi - \beta\Omega, \tag{1}$$

где C, A, α и β—положительные постоянные, m—частота возмущающего момента, φ—угол вращения и Ω—угловая скорость сферы. Если пренебрегать квадратичными членами инерции, то проблема определения движения самой сферы приводится к интеграции двух уравнений:

$$\rho^4\frac{\partial\omega}{\partial t} = \nu\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^4\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right), \tag{2}$$

$$I\frac{d\Omega}{dt} = N(t, \varphi, \Omega) - \frac{8}{3}\pi\mu a^4\left(\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right)_{\rho=a}, \tag{3}$$

при условиях:

$$\text{на границе } \rho = a, \quad \omega = \Omega(t), \tag{4}$$

$$\omega = 0 \text{ для момента } t = 0. \tag{5}$$

Как известно, решение задачи о вращении рассматриваемой сферы с постоянной угловой скоростью, равной единице, и при нулевых начальных условиях может быть представлено в следующей форме:

$$\omega_1(\rho, t) = 1 + \frac{2\sqrt{a}}{\rho^{3/2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{3/2}(\rho\lambda_k)}{\lambda_k J'_{3/2}(a\lambda_k)}e^{-\nu\lambda^2_k t}, \tag{6}$$

где суммирование производится по всем положительным корням уравнения:

$$J_{3/2}(a\lambda_k) = 0.$$

Применяя метод Римана (2), при переменном вращении сферы можно получить для ω следующее выражение:

$$\omega(\rho, t) = \Omega_0 \omega_1(\rho, t) + \int_0^t \Omega'(x)\, \omega_1(\rho, t-x)\, dx. \tag{7}$$

Легко проверить, что φ и Ω в (1) могут быть заменены через

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \Omega_0 t + \int_0^t \Omega'(x)(t-x)\, dx, \\ \Omega &= \Omega_0 + \int_0^t \Omega'(x)\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Пользуясь выражениями (3), (1), (8), (7) и (6), получим следующее интегральное уравнение Вольтерра для определения углового ускорения сферы:

$$\Omega'(t) = f(t) - \int_0^t \Omega'(x)\, K(t-x)\, dx, \tag{9}$$

где

$$f(t) = \frac{1}{I}\left[C - \alpha\varphi_0 - \beta\Omega_0 - \alpha\Omega_0 t + A\cos mt - \frac{16}{3}\pi\mu a^3\Omega_0 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu\lambda_k^2 t}\right], \tag{10}$$

$$K(t-x) = \frac{1}{I}\left[\beta + \alpha(t-x) + \frac{16}{3}\pi\mu a^3 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu\lambda_k^2 (t-x)}\right]. \tag{11}$$

Уравнение (9) принадлежит к типу интегральных уравнений, которые решаются тремя квадратурами с помощью преобразования Лапласа (3). Положим:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{I}\left[\frac{C - \alpha\varphi_0 - \beta\Omega_0}{s} - \frac{\alpha\Omega_0}{s^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{As}{s^2 + m^2} - \frac{16}{3}\pi\mu a^3\Omega_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s + \nu\lambda_k^2}\right], \tag{12}$$

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} K(\tau)\, d\tau = \frac{1}{I}\left[\frac{\beta}{s} + \frac{\alpha}{s^2} + \frac{16}{3}\pi\mu a^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s + \nu\lambda_k^2}\right]. \tag{13}$$

Помножая уравнение (9) на $e^{-st}dt$ и интегрируя от 0 до ∞, получим:

$$\int_0^\infty e^{-st}\, \Omega'(t)\, dt = \frac{F(s)}{1 + L(s)}.$$

Отсюда с помощью обращения преобразования Лапласа получим:

$$\Omega'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{ts}\,\frac{F(s)}{1+L(s)}\,ds. \tag{14}$$

Полюсами функции $\frac{F(s)}{1+L(s)}$ являются $s = \pm mi$ и корни уравнения

$$l + \frac{\beta}{s} + \frac{\alpha}{s^2} + \frac{16}{3}\pi\mu a^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s+\nu\lambda_k^2} = 0. \tag{15}$$

Легко видеть, что действительные корни уравнения (15) и действительные части комплексных корней отрицательны. Если $s = d + i\delta$ есть комплексный корень (15), то из (15) можно получить следующее неравенство

$$2\,\frac{\alpha}{\beta} > \frac{d^2+\delta^2}{|d|},$$

которое уже указывает на то, что комплексных корней уравнение (15) допускает ограниченное число. Если оборвать сумму в (15) на каком-то индексе l, то полученная рациональная функция не может иметь больше двух комплексных корней. Воспользуемся разложением:

$$\frac{J'_{3/2}(x)}{xJ_{3/2}(x)} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2} + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{x^2 - x_m^2},$$

где

$$J_{3/2}(x_m) = 0,$$

и положим

$$x^2 = -\frac{a^2 s}{\nu}, \quad x_m = a\lambda_m,$$

тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{s+\nu\lambda_k^2} = \frac{a^2}{2\nu}\left(\frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2} - \frac{J'_{3/2}(x)}{xJ_{3/2}(x)}\right).$$

При этом уравнение (15) преобразуется в уравнение:

$$J_{3/2}(x)\left[J\nu^2 x^4 - \beta\nu a^2 x^2 + 4\pi\mu\nu a^5 x^2 + \alpha a^4\right] - \frac{8}{3}\pi\mu\nu a^5 x^3 J'_{3/2}(x) = 0. \tag{16}$$

Применяя теорему Вейерштрасса о приближении функций и теорему Руше о корнях непревосходящей функции внутри контура, можно показать, что уравнение (16) допускает не более четырех комплексных корней.

Функцию $\frac{F(s)}{1+L(s)}$ можно представить в виде отношения двух целых четных функций $\frac{F_1(x)}{F_2(x)}$. Это отношение мы разлагаем на простые дроби:

$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_1(x_k)}{F_2'(x_k)}\,\frac{x_k}{x^2-x_k^2}.$$

Пользуясь уравнением (16) и рекуррентными формулами, мы можем $\frac{F_1(x_k)}{F_2'(x_k)}$ освободить от функций Бесселя. Так как

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{ts}\frac{ds}{s-s_k}=e^{ts_k},$$

то для углового ускорения получим следующее выражение:

$$\Omega'(t)=-\frac{16}{3}\pi\mu\nu^3a^3\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\nu\left(\frac{x_k}{a}\right)^2t}\cdot$$

$$\cdot\frac{x_k^6\left[\Omega_0 I\nu x_k^2+\alpha\varphi_0a^2-Ca^2-\dfrac{A\nu^2a^2x_k^4}{\nu^2x_k^4+m^2a^4}\right]}{[I\nu^2x_k^4-\beta\nu a^2x_k^4+4\pi\mu\nu a^5x_k^2+\alpha a^4]^2+\dfrac{16}{3}\mu\pi\nu a^5x_k\left[I\nu^2x_k^4-3\pi\mu\nu a^5x_k^2-\alpha a^4+\dfrac{4}{3}\pi\mu\nu a^5x_k^4\right]}+$$

$$+\text{действительная часть}\left[Ae^{mit}\frac{I}{I-\dfrac{\beta i}{m}-\dfrac{\alpha}{m^2}+\dfrac{16}{3}\pi\mu a^3\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{im+\nu\lambda_k^2}}\right],\qquad(17)$$

где x_k есть корень уравнения (16), а λ_k — корень уравнения

$$J_{3/2}(a\lambda_k)=0.$$

Научно-исследовательский институт механики
Московского государственного университета

Поступило
26 XII 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. R., **203**, 508—511. [2] Н. Е. Жуковский, т. II, вып. I, стр. 126. Fock, Math. ZS, **21**, 201 (1924).