Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 6

МАТЕМАТИКА

ЭРВИН ФЕЛЬДГЕЙМ

О ХАРАКТЕРЕ СХОДИМОСТИ ПРИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА

(*Представлено академиком С. Н. Бернштейном 11 I 1937*)

За последние годы теория интерполяционных рядов в действительной области была предметом многочисленных и очень важных исследований. Прежде всего нужно было изучить последовательность интерполяционных полиномов

$$X_1(x),\ X_2(x),\ \ldots,\ X_n(x),\ \ldots, \tag{1}$$

соответствующих непрерывной на интервале $a \leqslant x \leqslant b$ функции $f(x)$ и построенных таким процессом, который подлежит запрещению, если подходить к вопросу с точки зрения сходимости последовательности к этой функции при неограниченном возрастании числа точек интерполяции. В самом простом из таких процессов функции $f(x)$ приводится в соответствие многочлен n—1-й степени, совпадающий в n точках с разными абсциссами (так называемых основных точках)

$$x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \ldots,\ x_n^{(n)} \tag{2}$$

интервала (a, b) со значениями функции $f(x)$:

$$X_n(x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Основой этой теории является фундаментальный результат Фабера, в силу которого можно найти непрерывную на (a, b) функцию, обладающую тем свойством, что последовательность полиномов (1) не будет равномерно сходиться, каковы бы ни были абсциссы точек интерполяции (2).

Если этот процесс не может привести к приближению непрерывных функций, соответствующему теореме Вейерштрасса, то есть другие проблемы, где он с успехом может быть применен. Например такой проблемой является отыскание механических квадратур: результат, получаемый при интегрировании n-го приближающего многочлена, для $f(x)$ будет с возрастанием n как угодно близок к значению интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, если только соответствующим образом выбрать абсциссы точек интерполяции.

Эту проблему можно обобщить в том смысле, чтобы изучать с точки зрения сходимости интеграл от любой степени разности между функцией и приближающим ее многочленом n-й степени. В дальнейшем мы изложим основные результаты, полученные нами по этому вопросу для двух специальных случаев тригонометрических абсцисс интерполяции.

1. Обозначения.

Интерполяционный полином Лагранжа

$$L_n(x) = L_n(f) = f(x_1)\,l_1(x) + f(x_2)\,l_2(x) + \ldots + f(x_n)\,l_n(x)$$

приводит в соответствие функции $f(x)$ многочлен степени $\leqslant n-1$, принимающий для $x = x_k$ значение $f(x_k)$. Функции $l_k(x)$ (называемые фундаментальными функциями) оказываются таким образом многочленами степени $n-1$, определенными n условиями:

$$l_n(x_i) = \begin{cases} 0, & si\ i \neq k \\ 1, & si\ i = k \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Если мы обозначим через $\omega_n(x)$ многочлен n-й степени, для которого $x_1, x_2, \ldots x_n$ являются нулями

$$\omega_n(x) = c \prod_{i=1}^{n} (x - x_1) \qquad (c = \text{const, отличная от нуля}),$$

мы будем иметь:

$$l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)(x - x_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

В дальнейшем мы рассмотрим две системы абсцисс интерполяции:

a) систему T нулей многочлена:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

или в явной форме:

$$x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

b) систему U нулей многочлена:

$$U_n(x) = \frac{\sin \overline{n+1} \arccos x}{\sin \arccos x},$$

заданных формулой

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Мы докажем, что результаты, получаемые для этих двух систем точек, по виду столь мало различающихся, являются с точки зрения сходимости прямо противоположными. Так как обе эти системы точек расположены на интервале $(-1, +1)$, мы рассматриваем функцию $f(x)$, непрерывную на этом интервале.

Введем разность

$$E_n(x) = L_n(x) - f(x),$$

и пусть

$$I_n^{(p)} = \int_{-1}^{+1} [L_n(x) - f(x)]^p \, dx = \int_{-1}^{+1} E_n^p x \, dx. \tag{5}$$

Напомним, что последовательность $E_1(x)$, $E_2(x)$, ..., $E_n(x)$, ... не стремится к нулю в случае двух систем интерполяционных точек T и U.

2. Изучение (5) для системы T.

Для $p=1$ и $p=2$ вопрос решен в работах Фейера, Эрдеса и Турана. Они показали, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} E_n(x) \, dx = 0 \text{ (сходимость квадратур)}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} E_n^2(x) \, dx = 0 \text{ (сходимость в среднем).}$$

Из второго соотношения вытекает также, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} E_n(x) \, dx = 0.$$

Мы рассматривали в первую очередь интеграл I_n^4. Легко показать, что условием достаточным (но не необходимым) для сильной сходимости в среднем

$$\lim_{n\to\infty} I_n^{(4)} = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} [L_n(f) - f(x)]^4 \, dx = 0$$

является требование, чтобы сумма

$$A_4(u) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \left[\int_{-1}^{+1} l_p(x) \, l_q(x) \, l_r(x) \, l_s(x) \, dx \right]$$

оставалась ограниченной при $n \to \infty$.

То, что это условие не является необходимым, становится очевидным благодаря тому, что для системы T сумма $A_4(u)$ неограниченно возрастает, а сильная сходимость в среднем все таки имеет место. Мы имеем следующую теорему:

Теорема I. Для всякой функции, непрерывной на интервале $(-1, +1)$, и для системы T имеем:

$$\lim_{n\to\infty} I_n^{(2r)} = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} [L_n(x) - f(x)]^{2r} \, dx = 0.$$

Из этого можно также получить:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} |L_n(x) - f(x)|^p \, dx = 0,$$

если p — число, большее или равное единице (и не зависящее от n).

Наиболее важным элементом в доказательстве этой теоремы является:

Теорема II. Для абсцисс системы T фундаментальные функции $l_k(x)$ удовлетворяют условию ортогональности любого четного порядка

$$\int_{-1}^{+1} l_{i_1}(x)\, l_{i_2}(x) \ \dots \ l_{i_{2r}}(x)\, dx = 0,$$

где $i_1, i_2, \dots, i_{2r}$ — какие-нибудь $2r$ различных индексов, выбранных среди первых n целых чисел.

3. Изучение (5) для системы U.

Хотя результат Фейера

$$\lim_{n\to\infty} I_n^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} [L_n(x) - f(x)]\, dx = 0$$

сохраняет силу и для этого случая, нам удалось доказать, что уже вторая степень приводит к расходимости.

Теорема III. Существует такая непрерывная функция $f(x)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup \int_{-1}^{+1} [L_n(x) - f(x)]^2\, dx = +\infty,$$

если абсциссы интерполяции принадлежат к системе U.

Эта теорема сравнительно легко получается из известного построения Лебега, если принять во внимание лемму:

Лемма. Если $l_k(x)$ являются фундаментальными функциями, заданными (3) для случая точек (4), мы имеем тождество:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, l_k(x) = U_{n-1}(x),$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \int_{-1}^{+1} l_i(x)\, l_k(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} U_{n-1}^2(x)\, dx = 2 \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{2r+1} > \log \frac{2n}{3}.$$

Заметим, что в противоположность этому мы имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} [L_n(x) - f(x)]^2 \sqrt{1-x^2}\, dx = 0,$$

откуда можно вывести, что во всяком внутреннем интервале I

$$-1 + \varepsilon \leqslant x \leqslant 1 - \varepsilon$$

справедливо равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I} [L_n(x) - f(x)]^2\, dx = 0,$$

как бы мало ни было число ε.

Для четвертой степени сходимости не будет, даже если интегрировать относительно веса $\sqrt{1-x^2}$: можно найти такую непрерывную функцию $g(x)$, что

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} [L_n(x) - g(x)]^4 \sqrt{1-x^2} = +\infty.$$

Для более высоких степеней мы также имеем теорему:

Теорема IV. Если основные точки интерполяции даны формулой (4), то всегда возможно найти функцию $f(x)$, непрерывную на интервале $(-1, +1)$ и такую, что

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} [L_n(x) - f(x)]^{2r} dx = +\infty,$$

каково бы ни было целое положительное число ν (не зависящее от n).

4. В заключение сформулируем еще одну общую теорему о сильной сходимости в среднем для интерполирования по Лагранжу.

Теорема V. Сильная сходимость в среднем

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} [L_n(x) - f(x)]^4 dx = 0$$

имеет место для всякой непрерывной функции $f(x)$ на интервале $(-1, +1)$, если основными точками интерполяции служат n нулей многочлена $\omega_n(x)$, ортогонального относительно веса $p(x) \geqslant M > 0$ в этом интервале, лишь бы были соблюдены два условия:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} l_k^2(x) < C_1$ (постоянная, не зависящая от n),

b) $\omega_n^3(x) = \sum\limits_{k=n-3}^{3n} \alpha_k^{(n)} \omega_k(x)$ (где $\alpha_k^{(n)}$ — постоянные, не зависящие от x).

Условие b) (достаточное для ортогональности четвертого порядка фундаментальных функций) не является необходимым.

Его можно заменить, например, условием:

$$\left| \sum_1^n \sum \sum \sum_{p\neq q\neq r\neq s} \varepsilon_p \varepsilon_q \varepsilon_r \varepsilon_s \int_{-1}^{+1} l_p(x)\, l_q(x)\, l_r(x)\, l_s(x)\, dx \right| < C_2 \text{ (постоянное),}$$

для $n\to\infty$ и для $\varepsilon_p = \pm 1$ безразлично для всех индексов p.

Подробные доказательства этих результатов будут опубликованы в другом месте.

Париж.

Поступило
11 I 1937.