Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 6

МАТЕМАТИКА

Акад. С. Н. БЕРНШТЕЙН

О ФОРМУЛАХ КВАДРАТУР КОТЕСА И ЧЕБЫШЕВА

Как известно, в формуле квадратур Чебышева

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{1}$$

значения x_i определяются требованием, чтобы формула (1) была верна для всех многочленов степени не выше n; эта формула обычно применяется для $n=9$. Как мной было показано [1], формула Чебышева непригодна для очень больших значений n, так как значения x_i не могут тогда оставаться на отрезке 01. Весьма существенное дополнение к моему исследованию, имевшему предварительный ориентировочный характер, сделал недавно Р. О. Кузьмин [2], который нашел асимтотическое распределение величин x_i в комплексной плоскости при $n \to \infty$. Таким образом требование Чебышева является слишком жестким, и необходимо значительно снизить степень M_n многочленов, для которых формула (1) должна быть верна; после этого задача определения n неизвестных x_i из соответствующих $M_n < n$ уравнений становится *неопределенной*, и несомненный интерес представляет установление *максимального значения* M_n, при котором все x_i могут быть *вещественными*.

Аналогичная задача может быть поставлена и для формулы квадратур

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} C_i f\left(\frac{i}{n}\right) \tag{2}$$

в случае равно отстоящих абсцисс, если потребовать, чтобы все $C_i \geqslant 0$ были одинакового знака, так как известно, что при n весьма большом коэффициенты Котеса, однозначно определяемые условием, чтобы формула (2) была верна для всех многочленов степени n, имеют различные знаки.

Обозначая через N_n максимальную степень многочленов, для которых формула (2) верна, где $C_i \geqslant 0$, мы докажем, что

$$M_n < 4\sqrt{n}, \quad N_n < 4\sqrt{n}, \tag{3}$$

т. е. что формула (1) ни при каком подборе вещественных x_i, а формула (2) ни при каких $C_i \geqslant 0$ не могут быть верны для всех многочленов степени $p \geqslant 4\sqrt{n}$.

Для этого напомним формулу механических квадратур Гауса:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \rho_m^{(i)} f(\gamma_i) \quad (\rho_m^{(i)} > 0), \tag{4}$$

где $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_m$—корни многочлена Лежандра $P_m(x)$ степени m на отрезке 01, которая верна для всех многочленов степени $2m-1$. В таком случае имеет место следующая

Теорема I. *Если формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} p_i f(y_i) \quad (n > m), \tag{5}$$

где $p_i > 0$ и числа y_i вещественны, верна для всех многочленов степени $2m-1$, то существует по крайней мере одно значение $y_i < \gamma_1$.

Действительно, из того, что формулы (4) и (5) применимы к многочлену

$$R_{2m-1}(x) = \frac{P_m^2(x)}{\left(1 - \frac{x}{\gamma_1}\right) P_m^2(0)}, \tag{6}$$

следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_i R_{2m-1}(y_i) = 0;$$

но $R_{2m-1}(x) > 0$ при $x < \gamma_1$, $R_{2m-1}(x) \leqslant 0$ при $x \geqslant \gamma_1$; поэтому, замечая, что вследствие $n > m$ все члены суммы (6) не могут быть нулями, заключаем, что есть по крайней мере одно значение $y_i < \gamma_1$.

Аналогичным образом доказывается

Теорема II. *Если формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = p_0 f(0) + \sum_{i=1}^{n} p_i f(y_i) \quad (n > m), \tag{5bis}$$

где $p_i > 0$, $y_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, верна для всех многочленов степени $2m-1$, то существует по крайней мере одно значение y_i в промежутке $(0 < y_i < \beta_1)$, где β_1—наименьший из корней $P'_m(x)$.

В самом деле, нетрудно видеть, что для всех многочленов степени $2m-1$ верна формула квадратур:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \pi_0 f(0) + \sum_{i=1}^{m-1} \pi_i f(\beta_i) + \pi_m f(1), \tag{7}$$

где $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{m-1}$ — корни многочлена $P'_m(x)$ (производной многочлена Лежандра). Поэтому, применяя к многочлену

$$F_{2m-1}(x) = \frac{P'^2_m(x)\, x\,(1-x)}{x-\beta_1}$$

формулы (5bis) и (7), находим, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, F_{2m-1}(y_i) = 0;$$

откуда заключаем, подобно предыдущему, что существует по крайней мере одно значение y_i внутри промежутка $(0, \beta_1)$. Разумеется, аналогичные предложения справедливы и для других промежутков между корнями $P_m(x)$ или $P'_m(x)$, но мы не станем на этом останавливаться, так как они нам не нужны в настоящий момент. Из теоремы II непосредственно вытекает

Следствие I. *Если формула* (2), *где* $C_i \geqslant 0$, *верна для любых многочленов степени* $2m-1$, *то*

$$\frac{1}{n} < \beta_1^{(m)}, \tag{8}$$

где $\beta_1^{(m)}$ — *наименьший корень многочлена* $P'_m(x)$ (производной многочлена Лежандра степени m).

С другой стороны,

$$(-1)^m P_m(x) = 1-(m+1)\,m x + \ldots + \\ + \frac{(m+k)\ldots(m-k+1)}{(k!)^2}(-x)^k + \ldots + \frac{2m!}{(m!)^2}(-x)^m, \tag{9}$$

$$\frac{(-1)^{m-1}P'_m(x)}{m(m+1)} = 1-\frac{(m+2)(m-1)}{2}x + \ldots + \\ + \frac{(m+k+1)\ldots(m+2)(m-1)\ldots(m-k)}{(k+1)!\,k!}(-x)^k + \ldots \tag{10}$$

Подставляя (при $m > 1$) во вторую часть равенства (10) значение $x = \frac{4}{(m-1)(m+3)}$, нетрудно проверить, что она становится отрицательной; поэтому

$$\beta_1^{(m)} < \frac{4}{(m-1)(m+3)}.$$

Таким образом вследствие (8) имеем:

$$\frac{1}{n} < \frac{4}{(m-1)(m+3)}.$$

Следовательно, если $N_n = 2m-1$—нечетное число, то

$$\frac{1}{n} < \frac{16}{(N_n-1)(N_n+7)}; \tag{11}$$

если же N_n—четное число, то

$$\frac{1}{n} < \frac{16}{(N_n-2)(N_n+6)}. \tag{11bis}$$

Таким образом второе из неравенств (3) доказано.

Заметим, что в случае коэффициентов Котеса N_n всегда нечетно, так как $N_n = n+1$ при n четном. Поэтому в случае n четного неравенство (11) получает вид:

$$\frac{1}{n} < \frac{16}{n(n+8)};$$

откуда $n < 8$, т. е. для всякого n четного среди коэффициентов Котеса должны быть отрицательные числа, начиная от $n \geqslant 8$. При n нечетном неравенство (11) дает

$$(n-1)(n+7) < 16n, \text{ т. е. } n^2 - 10n - 7 < 0,$$

откуда $n < 11$; следовательно, для всех $n \geqslant 10$ среди коэффициентов Котеса должны быть отрицательные числа.

Для получения первого из неравенств (3) нам понадобится еще

Теорема III. *Если формула* (1) *верна для всех многочленов степени* $2m-2$, *то*

$$\frac{1}{n} S(\gamma_1) \leqslant \rho_m^{(1)}, \tag{12}$$

где γ_1 — *наименьший из корней многочлена Лежандра* $P_m(x)$, $\rho_m^{(1)}$ — *соответствующий ему коэффициент в формуле* (4), *а* $S(x)$ *представляет число значений* $x_i \leqslant x$.

В самом деле, применяя к многочлену

$$F_{2m-2}(x) = \frac{P_m^2(x)}{(x-\gamma_1)^2 P_m'^2(\gamma_1)}$$

степени $2m-2$ формулы (1) и (4), получим:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F_{2m-2}(x_i) = \rho_m^{(1)}. \tag{13}$$

Но так как многочлен $F_{2m-2}(x)$, представляя точный квадрат, не отрицателен, и производная его не имеет корней вне отрезка (γ_1, γ_m), то

$$F_{2m-2}(x) \geqslant 1 \text{ при } x \leqslant \gamma_1,$$

поэтому из (13) вытекает (12).

Сопоставляя теорему I и теорему III, получаем

Следствие II. *Если формула* (1) *верна для всех многочленов степени* $2m-1$, *то имеет место неравенство*:

$$\frac{1}{n} \leqslant \rho_m^{(1)}. \tag{14}$$

Применяя оценки многочленов Лежандра и их производных, данные мной в другом месте ([3]), имеем:

$$\rho_m^{(1)} < \frac{\pi}{m} \sqrt{\gamma_1(1-\gamma_1)}; \tag{15}$$

с другой стороны, подставляя $x = \frac{3}{2m(m+1)}$ в правую часть равенства (9), видим, что

$$\gamma_1 < \frac{3}{2m(m+1)};$$

поэтому

$$\rho_m^{(1)} < \frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{3\left(m^2+m-\frac{3}{2}\right)}{2(m^2+m)^2}} < \frac{\pi\sqrt{6}}{m(2m+1)}. \tag{16}$$

Таким образом из (14) следует, при M_n нечетном,

$$\frac{1}{n} < \frac{2\pi\sqrt{6}}{(M_n+1)(M_n+2)} < \frac{15.4}{(M_n+1)(M_n+2)}, \tag{17}$$

и в случае n четного:

$$\frac{1}{n} < \frac{15.4}{M_n(M_n+1)}, \tag{17bis}$$

откуда для всех n вытекает первое из неравенств (3).

В частности условие Чебышева требует, чтобы $M_n = n$ при n нечетном, и $M_n = n+1$ при n четном; поэтому в последнем случае (n четное) имеем:

$$\frac{1}{n} < \frac{15.4}{(n+2)(n+3)}, \text{ т. е. } n+5+\frac{6}{n} < 15.4,$$

откуда $n < 10$. При n нечетном:

$$\frac{1}{n} < \frac{15.4}{(n+1)(n+2)}, \text{ т. е. } n+3+\frac{2}{n} < 15.4,$$

поэтому $n < 13$. Таким образом формула Чебышева во всяком случае непригодна для $n > 11$ (и $n = 10$). Кроме того, если вместо (17) мы воспользуемся неравенством (14) и вычислим непосредственно (с точностью до 0.0001) $\rho_5^{(1)} < 0.0857 < \frac{1}{11}$, то увидим, что формула Чебышева неприменима и для $n = 11$; заметим также, что вследствие того же неравенства (14) она должна привести к комплексным значениям x_i и при $n = 8$, так как $\rho_4^{(1)} < 0.1185 < \frac{1}{8}$.

Поступило
16 I 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, ИМЕН (1932). [2] R. O. Kuzmin, C. R., **201**, 1094 **202**, 272. [3] S. N. Bernstein, Journ. de Mathém., X, 219—286.