Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 6

МАТЕМАТИКА

И. Н. ВЕКУА

ОБ ОБЩЕМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 31 VIII 1937)

Из литературных данных видно, что при помощи двух аналитических функций от одной комплексной переменной можно получить интегральное представление общего решения уравнения:

$$L(U) = U_{z\bar{z}} + AU_z + BU_{\bar{z}} + CU = 0, \tag{1}$$

где

$$z = z_1 + iz_2,\ \bar{z} = z_1 - iz_2,\ U_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z_1} - i\frac{\partial U}{\partial z_2}\right),$$

$$U_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z_1} + i\frac{\partial U}{\partial z_2}\right),\ z_k = x_k + iy_k\ (k = 1, 2),$$

A, B, C — данные функции, определенные в некоторой (четырехмерной) области пространства переменных z_1 и z_2. При этом в указанное представление входит ядро, являющееся некоторым частным решением определенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя независимыми переменными.

В настоящей заметке мы указываем другой способ представления общего решения уравнения (1) в виде некоторого линейного интегрального оператора второго рода от двух аналитических функций одной комплексной переменной. Наш метод не требует построения частного решения вышеуказанного уравнения, и задача полностью решается при помощи интегрального уравнения типа Вольтерра в двумерной комплексной области.

В дальнейшем мы будем предполагать функции A, B, C регулярными аналитическими вблизи начала координат в четырехмерном пространстве переменных z_1 и z_2.

Интегрируя обе части уравнения (1) два раза последовательно по z и по $\bar{z}$ и применяя способ интегрирования по частям, получим интегральное уравнение типа Вольтерра, эквивалентное с исходным дифференциальным уравнением (1):

$$U(z, \bar{z} + \int_0^{\bar{z}} A(z, \bar{\xi})\, U(z, \bar{\xi})\, d\bar{\xi} + \int_0^{z} B(\xi, \bar{z})\, U(\xi, \bar{z})\, d\xi +$$

$$+ \int_0^{z} d\xi \int_0^{\bar{z}} D(\xi, \bar{\xi})\, U(\xi, \bar{\xi})\, d\bar{\xi} = \varphi(z) + \bar{\psi}(\bar{z}). \tag{2}$$

где

$$D(z, \bar{z}) = C(z, \bar{z}) - \frac{\partial A(z, \bar{z})}{\partial z} - \frac{\partial B(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}}, \tag{3}$$

$\varphi(z)$ и $\bar{\psi}(\bar{z})$ — аналитические функции соответственно от переменных z и $\bar{z}$, причем, как нетрудно видеть,

$$\varphi'(z) = U_z(z, 0) + B(z, 0)\, U(z, 0)$$

и

$$\bar{\psi}'(\bar{z}) = U_{\bar{z}}(0, \bar{z}) + A(0, \bar{z})\, U(0, \bar{z}).$$

Интегральное уравнение (2) является так называемым нагруженным уравнением типа Вольтерра; но простыми преобразованиями мы можем его свести к обыкновенному виду.

В самом деле, пусть

$$U(z, \bar{z}) + \int\limits_0^{\bar{z}} A(z, \bar{\xi})\, U(z, \bar{\xi})\, d\bar{\xi} = U_0(z, \bar{z}); \tag{4}$$

отсюда дифференцированием по $\bar{z}$ получим:

$$\frac{\partial U(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} + A(z, \bar{z})\, U(z, \bar{z}) - \frac{\partial U_0(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0. \tag{5}$$

Общий интеграл этого уравнения, как легко видеть, будет

$$U(z, \bar{z}) = \exp\left[-\int\limits_0^{\bar{z}} A(z, \bar{\xi})\, d\bar{\xi}\right] \left\{ U(z, 0) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{\bar{z}} \frac{\partial U_0(z, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}} \exp\left[\int\limits_0^{\bar{\xi}} A(z, \bar{\xi}_1)\, d\bar{\xi}_1\right] d\bar{\xi} \right\}$$

или, принимая во внимание, что в силу (4)

$$U(z, 0) = U_0(z, 0),$$

и применяя интегрирование по частям, получим

$$U(z, \bar{z}) = U_0(z, \bar{z}) - \int\limits_0^{\bar{z}} A(z, \bar{\xi})\, U_0(z, \bar{\xi}) \exp\left[-\int\limits_{\bar{\xi}}^{\bar{z}} A(z, \bar{\xi}_1)\, d\bar{\xi}_1\right] d\bar{\xi}. \tag{6}$$

Подставляя в уравнение (2) на место $U(z, \bar{z})$ ее выражение из (6), получим:

$$U_0(z, \bar{z}) + \int\limits_0^{z} B(\xi, \bar{z})\, U_0(\xi, \bar{z})\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^{z} d\xi \int\limits_0^{\bar{z}} D_1(\bar{z}, \xi, \bar{\xi})\, U_0(\xi, \bar{\xi})\, d\bar{\xi} = \varphi(z) + \bar{\psi}(\bar{z}), \tag{7}$$

где

$$D_1(\bar{z}, \xi, \bar{\xi}) = -B(\xi, \bar{z})\, A(\xi, \bar{\xi}) \exp\left[-\int\limits_{\bar{\xi}}^{\bar{z}} A(\xi, \bar{\xi}_1)\, d\bar{\xi}_1\right] + D(\xi, \bar{\xi}) -$$

$$- A(\xi, \bar{\xi}) \int\limits_{\bar{\xi}}^{\bar{z}} D(\xi, \bar{\xi}_1) \exp\left[-\int\limits_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}_1} A(\xi, \bar{\xi}_2)\, d\bar{\xi}_2\right] d\bar{\xi}_1. \tag{8}$$

Положим теперь

$$U_0(z,\bar z)+\int_0^z B(\xi,\bar z)\,U_0(\xi,\bar z)\,d\xi=V(z,\bar z);\tag{9}$$

отсюда получим:

$$U_0(z,\bar z)=V(z,\bar z)-\int_0^z B(\xi,\bar z)\,V(\xi,\bar z)\exp\left[-\int_\xi^z B(\xi_1,\bar z)\,d\xi_1\right]d\xi.\tag{10}$$

В силу (9) и (10) уравнение (7) примет вид:

$$V(z,\bar z)=\int_0^z d\xi\int_0^{\bar z} K(z,\bar z,\xi,\bar\xi)\,V(\xi,\bar\xi)\,d\bar\xi+\varphi(z)+\bar\psi(\bar z),\tag{11}$$

где

$$K(z,\bar z,\xi,\bar\xi)=-D_1(\bar z,\xi,\bar\xi)+B(\xi,\bar\xi)\int_\xi^z D_1(\bar z,\xi_1,\bar\xi)\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-\int_\xi^z B(\xi_2,\bar\xi)d\xi_2\right]d\xi_1.\tag{12}$$

Это есть интегральное уравнение типа Вольтерра обыкновенного вида.

Пусть $H(z,\bar z,\xi,\bar\xi)$ есть резольвента ядра $K(z,\bar z,\xi,\bar\xi)$.

Имеем:

$$H(z,\bar z,\xi,\bar\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n(z,\bar z,\xi,\bar\xi),\tag{13}$$

где

$$K_1=K(z,\bar z,\xi,\bar\xi),\quad K_n=\int_\xi^z d\xi_1\int_{\bar\xi}^{\bar z}K(z,\bar z,\xi_1,\bar\xi_1)\,K_{n-1}(\xi_1,\bar\xi_1,\xi,\bar\xi)\,d\bar\xi_1\tag{14}$$

$$(n=2,3,\ldots).$$

Тогда решение интегрального уравнения (11) будет

$$V(z,\bar z)=\varphi(z)+\bar\psi(\bar z)+\int_0^z H_1(z,\bar z,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi+\int_0^{\bar z}H_2(z,\bar z,\bar\xi)\,\bar\psi(\bar\xi)\,d\bar\xi,\tag{15}$$

где

$$H_1(z,\bar z,\xi)=\int_0^{\bar z}H(z,\bar z,\xi,\bar\xi)\,d\bar\xi;\quad H_2(z,\bar z,\bar\xi)=\int_0^z H(z,\bar z,\xi,\bar\xi)\,d\xi.\tag{16}$$

Выразим теперь решение исходного интегрального уравнения (2) при помощи функции $\varphi(z)$ и $\bar\psi(\bar z)$.

На основании (15) после простых преобразований формула (10) дает:

$$U_0(z,\bar z)=\varphi(z)+\bar\psi(\bar z)\exp\left[-\int_0^z B(\xi,\bar z)\,d\xi\right]+$$

$$+\int_0^z H_3(z,\bar z,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi+\int_0^{\bar z}H_4(z,\bar z,\bar\xi)\,\bar\psi(\bar\xi)\,d\bar\xi,\tag{17}$$

где

$$H_3(z,\bar z,\xi)=H_1(z,\bar z,\xi)-B(\xi,\bar z)\exp\left[-\int_{\xi}^{0}B(\xi_1,\bar z)d\xi_1\right]-$$

$$-\int_{\xi}^{z}B(\xi_1,\bar z)H_1(\xi_1,\bar z,\xi)\exp\left[-\int_{\xi}^{z}B(\xi_2,\bar z)\,d\xi_2\right]d\xi_1,$$

$$H_4(z,\bar z,\bar\xi)=H_2(z,\bar z,\bar\xi)-\int_{0}^{z}B(\xi,\bar z)H_2(\xi,\bar z,\bar\xi)\exp\left[-\int_{\xi}^{z}B(\xi_1,\bar z)\,d\xi_1\right]d\xi.$$

Подставляя теперь значение $U_0(z,\bar z)$ в формулу (6), после простых выкладок получим искомую формулу:

$$U(z,\bar z)=\varphi(z)\exp\left[-\int_0^{\bar z}A(z,\bar\xi)\,d\bar\xi\right]+\bar\varphi(\bar z)\exp\left[-\int_0^{z}B(\xi,\bar z)\,d\xi\right]+$$

$$+\int_0^{z}H^{(1)}(z,\bar z,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi+\int_0^{\bar z}H^{(2)}(z,\bar z,\bar\xi)\,\bar\varphi(\bar\xi)\,d\bar\xi, \tag{18}$$

где

$$H^{(1)}(z,\bar z,\xi)=H_3(z,\bar z,\xi)-\int_0^{\bar z}A(z,\bar\xi)H_3(z,\bar\xi,\xi)\exp\left[-\int_{\bar\xi}^{\bar z}A(z,\bar\xi_1)\,d\bar\xi_1\right]d\bar\xi,$$

$$H^{(2)}(z,\bar z,\bar\xi)=H_4(z,\bar z,\bar\xi)-A(z,\bar\xi)\exp\left[-\int_0^{z}B(\xi,\bar\xi)\,d\xi-\int_{\bar\xi}^{\bar z}A(z,\bar\xi)\,d\bar\xi\right]-$$

$$-\int_{\bar\xi}^{\bar z}A(z,\bar\xi)H_4(z,\bar\xi_1,\bar\xi)\exp\left[-\int_{\bar\xi_1}^{\bar z}A(z,\bar\xi_2)\,d\bar\xi_2\right]d\bar\xi_1.$$

Формула (18) дает решение интегрального уравнения (2) и вместе с тем общее решение эквивалентного ему дифференциального уравнения (1). Основным моментом для указанного выше процесса построения решения уравнения (1) является решение интегрального уравнения (11), типа Вольтерра, что всегда можно выполнить при помощи хотя бы метода последовательных приближений.

Рассмотрим теперь в качестве примера случай, когда коэффициенты A, B и C уравнения (1) — постоянные. В этом случае, как нетрудно видеть, ядро интегрального уравнения (11)

$$K(z,\bar z,\xi,\bar\xi)=(C-AB)\exp\left[-A(\bar z-\bar\xi)-B(z-\xi)\right], \tag{19}$$

и резольвента $H(z,\bar z,\xi,\bar\xi)$ в силу (13) и (14) будет:

$$H(z,\bar z,\xi,\bar\xi)=-(C-AB)\exp\left[-A(\bar z-\bar\xi)-B(z-\xi)\right]\cdot$$

$$\cdot J_0\left(2\sqrt{(C-AB)(z-\xi)(\bar z-\bar\xi)}\right). \tag{20}$$

Решение исходного дифференциального уравнения (1) получим при помощи формулы (18). В частности, если $C=A\cdot B$, то $H(z,\bar z,\xi,\bar\xi)=0$

и, как нетрудно видеть, в силу формул (17) и (18) решение дифференциального уравнения (1) в этом случае будет иметь вид:

$$U(z, \bar{z}) = e^{-Az}\varphi(z) + e^{-Bz}\overline{\psi}(\bar{z}) - Be^{-A\bar{z}}\int_0^z e^{-B(z-\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi -$$

$$- Ae^{-Bz}\int_0^{\bar{z}} e^{-A(\bar{z}-\bar{\xi})}\overline{\psi}(\bar{\xi})\,d\bar{\xi}. \tag{21}$$

Наконец укажем еще на одно применение нашего метода к задаче, которую мы будем называть задачей Гурса. Для этого введем предварительные понятия. Многообразия в четырехмерном пространстве $\{z, \bar{z} = \text{const}\}$ и $\{z = \text{const}, \bar{z}\}$ мы назовем характеристиками дифференциального уравнения (1).

Рассмотрим по одной характеристике из каждого многообразия, и пусть на каждой из них задано значение фукции $U(z, \bar{z})$. Задача Гурса состоит в том, чтобы по этим заданиям определить значение $U(z, \bar{z})$ в точках, не лежащих на указанных характеристиках, но близких к точке их пересечения. Эту задачу короче можно сформулировать так:

Требуется найти решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$U(z, 0) = f(z),\ U(0, \bar{z}) = \bar{g}(\bar{z}),\ \left(\bar{g}(0) = f(0)\right), \tag{22}$$

где $f(z)$ и $\bar{g}(\bar{z})$ — заданные регулярные аналитические функции соответственно от переменных z и $\bar{z}$ вблизи начала координат.

Решение этой задачи дается формулой (18), если туда подставить на место $\varphi(z)$ и $\overline{\psi}(\bar{z})$ выражения:

$$\varphi(z) = f(z) + \int_0^z B(z, 0) f(z)\,dz,$$

$$\overline{\psi}(\bar{z}) = \bar{g}(\bar{z}) + \int_0^{\bar{z}} A(0, \bar{z})\,\bar{g}(\bar{z})\,d\bar{z}.$$

Тбилисский математический институт.
Грузинский филиал Академии Наук СССР

Поступило
31 VIII 1937.