Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 6

МАТЕМАТИКА

Н. Е. КОЧИН

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ РИМАНА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 2 X 1937)

Обозначим через W_1 и W_2 две произвольные матрицы порядка n, элементами которых служат комплексные числа. Пусть еще $Y(x)$—матрица того же порядка n, зависящая от независимой комплексной переменной x. Обозначим через $\Psi_b\left(\begin{matrix}W_1 & W_2\\ a_1 & a_2\end{matrix}\middle|\, x\right)$ матрицу $Y(x)$, определенную следующими условиями:

1) $Y(x)$ есть аналитическая функция от x, особенностями которой являются точки a_1, a_2, ∞;

2) разрезая плоскость x по двум купюрам, идущим из a_1 и a_2 на ∞, не пересекающимся друг с другом и не проходящим через точку b, мы получаем однозначную ветвь функции $Y(x)$, которая в точке $x=b$ обращается в единичную матрицу I и для которой в окрестности особых точек a_1, a_2, ∞ имеют место представления:

$$Y(x)=(x-a_1)^{W_1}\,Y_1(x),$$
$$Y(x)=(x-a_2)^{W_2}\,Y_2(x),$$
$$Y(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{W_\infty}Y_\infty(x),$$

где $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $Y_\infty(x)$ и обратные матрицы $Y_1(x)^{-1}$, $Y_2(x)^{-1}$, $Y_\infty(x)^{-1}$ остаются голоморфными функциями от x соответственно в окрестности особых точек a_1, a_2, ∞. В том случае, когда условие $Y(b)=I$ заменяется условием, что в окрестности точки $x=a_1$ имеет место представление вида:

$$Y(x)=(x-a_1)^{W_1}\,Y_1(x),$$

причем матрицы $Y_1(x)$ и $Y_1(x)^{-1}$ голоморфны в точке $x=a_1$ и обращаются в этой точке в единичную матрицу I, мы будем обозначать матрицу $Y(x)$ через $\vartheta_1\left(\begin{matrix}W_1 & W_2\\ a_1 & a_2\end{matrix}\middle|\, x\right)$.

Аналогичное значение имеет $\vartheta_2\left(\begin{matrix}W_1 & W_2\\ a_1 & a_2\end{matrix}\middle|\, x\right)$.

Введем теперь следующее обозначение:

$$[W_1W_2]=W_1W_2-W_2W_1.$$

Предметом настоящей заметки является отыскание функций

$$\Psi_b\left(\begin{matrix}W_1 & W_2\\ a_1 & a_2\end{matrix}\middle|\, x\right)\quad \text{и}\quad \vartheta_j\left(\begin{matrix}W_1 & W_2\\ a_1 & a_2\end{matrix}\middle|\, x\right)$$

в том частном случае, когда матрицы W_1 и W_2 удовлетворяют следующим двум условиям:

$$\left[W_1 [W_1 W_2]\right] = 0, \quad \left[W_2 [W_1 W_2]\right] = 0. \tag{1}$$

Эта задача представляет очевидно очень частный случай задачи Римана.

Заметим прежде всего, что если матрицы W_1 и W_2 удовлетворяют условиям (1), то имеет место следующее соотношение

$$f(W_1) W_2 = W_2 f(W_1) + [W_1 W_2] f'(W_1),$$

где $f(W_1)$ есть аналитическая функция от матрицы W_1; отметим далее формулы:

$$e^{W_1} e^{W_2} = e^{W_2} e^{W_1} e^{[W_1 W_2]},$$

$$e^{W_1} e^{W_2} = e^{W_1 + W_2 + \frac{1}{2}[W_1 W_2]}.$$

Чтобы доказать последнее соотношение, можно например рассмотреть две функции:

$$\Phi(\alpha) = e^{\alpha W_1} e^{W_2}, \quad \Psi(\alpha) = e^{\alpha W_1 + W_2 + \frac{1}{2}\alpha [W_1 W_2]},$$

принимающие при $\alpha = 0$ одинаковое значение e^{W_2} и удовлетворяющие одинаковому дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = W_1 \Phi, \quad \frac{d\Psi}{d\alpha} = W_1 \Psi;$$

очевидно поэтому, что функции $\Phi(\alpha)$ и $\Psi(\alpha)$ тождественны.

Отметим еще следующую формулу

$$\frac{d}{dx} e^{W_1 a(x) + W_2 b(x) + [W_1 W_2] c(x)} =$$

$$= e^{W_1 a(x) + W_2 b(x) + [W_1 W_2] c(x)} \left\{ W_1 \frac{da}{dx} + W_2 \frac{db}{dx} + [W_1 W_2] \left(\frac{dc}{dx} + \frac{1}{2} b \frac{da}{dx} - \frac{1}{2} a \frac{db}{dx} \right) \right\}.$$

Введем наконец обозначение:

$$L_b(x, a) = \int_b^x \frac{dx}{x - a} = \lg \frac{x - a}{b - a}.$$

Нетрудно теперь видеть, что функция

$$\Psi_b \left(\begin{matrix} W_1 & W_2 \\ a_1 & c_2 \end{matrix} \middle| \, x \right) =$$

$$= e^{W_1 L_b(x, a_1) + W_2 L_b(x, a_2) + [W_1 W_2] \left\{ \frac{1}{2} L_b(x, a_1) L_b(x, a_2) - L_b(a_2, a_1) L_b(x, a_2) - \int_b^x \frac{L_{a_1}(x, a_2)}{x - a_1} dx \right\}}$$

удовлетворяет всем поставленным условиям.

Вычисление показывает при этом, что для ветви функции

$$\Psi_b \left(\begin{matrix} W_1 & W_2 \\ a_1 & a_2 \end{matrix} \middle| \, x \right),$$

получающейся при продолжении в область слева от купюры (a_1, ∞), будет

$$W_\infty = -W_1 - W_2 + \pi i [W_1 W_2],$$

а для ветви, получающейся при продолжении в область справа от этой купюры,

$$W_\infty = -W_1 - W_2 - \pi i [W_1 W_2].$$

Матрица $\vartheta_1\left(\begin{matrix} W_1 & W_2 \\ a_1 & a_2 \end{matrix}\middle| x\right)$, которая отличается от матрицы $\Psi_b\left(\begin{matrix} W_1 & W_2 \\ a_1 & a_2 \end{matrix}\middle| x\right)$ только постоянным матричным множителем C справа, может быть представлена в следующем виде:

$$\vartheta_1\left(\begin{matrix} W_1 & W_2 \\ a_1 & a_2 \end{matrix}\middle| x\right) =$$

$$= (x - a_1)^{W_1} e^{W_2 L_{a_1}(x, a_2) - [W_1 W_2] \left\{ \lg(a_2 - a_1) L_{a_1}(x, a_2) + \int\limits_{a_1}^{x} \frac{L_{a_1}(x, a_2)}{x - a_1} dx \right\}}.$$

Аналогично имеем:

$$\vartheta_2\left(\begin{matrix} W_1 & W_2 \\ a_1 & a_2 \end{matrix}\middle| x\right) =$$

$$= (x - a_2)^{W_2} e^{W_1 L_{a_2}(x, a_1) + [W_1 W_2] \left\{ \lg(a_1 - a_2) L a_2(x, a_1) + \int\limits_{a_2}^{x} \frac{L_{a_2}(x, a_1)}{x - a_2} dx \right\}}.$$

Матрица $\Psi_b(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Гаусса:

$$\frac{d\Psi_b}{dx} = \Psi_b\left(\frac{U_1}{x - a_1} + \frac{U_2}{x - a_2}\right),$$

где

$$U_1 = W_1 + [W_1 W_2] L_b(a_1, a_2),$$
$$U_2 = W_2 - [W_1 W_2] L_b(a_2, a_1).$$

Точно такому же уравнению удовлетворяют матрицы $\vartheta_1(x)$ и $\vartheta_2(x)$, причем для матрицы $\vartheta_1(x)$ матрицы U_1 и U_2 имеют значения:

$$U_1 = W_1, \quad U_2 = W_2 - [W_1 W_2] \lg(a_2 - a_1),$$

а для матрицы $\vartheta_2(x)$ значения:

$$U_1 = W_1 + [W_1 W_2] \lg(a_1 - a_2), \quad U_2 = W_2.$$

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
4 X 1937.