Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 6

МАТЕМАТИКА

Б. ЛЕВИТАН

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. II

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 2 X 1937)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_{i,1}(t)\,x_1 + f_{i,2}(t)\,x_2 + \ldots + f_{i,n}(t)\,x_n + g_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots n), \quad \text{(S)}$$

где $f_{i,k}(t)$ и $g_i(t)$—вещественные непрерывные почти периодические функции. Такими уравнениями впервые подробно занимался J. Favard (1). Favard ищет достаточные условия, при которых ограниченные решения таких уравнений будут также функциями почти периодическими.

Условия Favard'а (повидимому существенные) обладают тем недостатком, как это замечает сам Favard, что они не основываются на свойствах самой системы.

В настоящей заметке я укажу, как нужно расширить понятие почти периодичности для того, чтобы по свойству самой системы можно было судить, когда ограниченные решения системы (S) будут функциями почти периодическими в этом обобщенном смысле.

Рассмотрим класс функций, удовлетворяющих следующим двум условиям *.

Условие I. *Каковы бы ни были* $\varepsilon > 0$ *и* $N > 0$, *можно указать относительно плотное множество чисел* $\tau = \tau(\varepsilon; N)$ *так, что*

$$|f(x \pm \tau) - f(x)| < \varepsilon,$$

если $|x| < N$.

Условие II.

$$\tau(\varepsilon; N) + \tau(\rho; N) = \tau(\delta; N),$$

причем $\delta = \delta(\varepsilon; \rho)$ *стремится к нулю, если* ε *и* ρ *стремятся к нулю.*

Имеет место следующая

Теорема I. *Если неоднородная система*** (S) *имеет ограниченное решение и если соответствующая однородная система не имеет ограниченного решения (за исключением тривиального решения* $x_i = 0$), *то ограниченное решение системы* (S) *удовлетворяет условиям* I *и* II.

---

* См. предыдущую заметку.

** Коэффициенты системы (S) могут быть почти периодическими в смысле H. Bohr'а или в обобщенном смысле.

Если под абсолютным значением решения понимать корень квадратный из выражения

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) + \ldots + x_n^2(t),$$

то имеет место

Теорема II. *Если однородная система не имеет решения, абсолютное значение которого при $t \to \pm\infty$ становится сколь угодно малым (за исключением решения $x_i = 0$), и если система* (S) *имеет ограниченные решения, то по крайней мере одно из них будет удовлетворять условиям* I *и* II.

Заметим, что на этом пути удается также дать новое доказательство трем теоремам Favard'а.

Институт математики и механики.
Харьковский государственный университет.

Поступило
2 X 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Favard, Acta Math., **51**, 31—81 (1928).