Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 6

МАТЕМАТИКА

Б. ЛЕВИТАН

НОВОЕ ОБОБЩЕНИЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. I

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 2 X 1937)

Как известно, в теории почти периодических функций H. Bohr'a центральное место занимает теорема единственности или эквивалентное теореме единственности уравнение Parseval'я.

Обобщение почти периодических функций Besicovitch'a имеет в виду главным образом расширение класса функций таким образом, чтобы сохранилось уравнение Parseval'я.

В настоящей заметке мы укажем класс непрерывных функций, обобщающий класс почти периодических функций H. Bohr'a, в области которого сохраняется теорема единственности.

Эти функции удовлетворяют следующим двум условиям:

Условие I. *Каковы бы ни были* $\varepsilon > 0$ *и* $N > 0$, *можно указать относительное плотное множество чисел* $\tau = \tau(\varepsilon, N)$ *так, что*

$$|f(x \pm \tau) - f(x)| < \varepsilon,$$

если $|x| < N$.

Условие II.

$$\tau(\varepsilon, N) + \tau(\rho, N) = \tau(\delta, N),$$

причем $\delta = \delta(\varepsilon, \rho)$ *стремится к нулю, если* ε *и* ρ *стремятся к нулю.*

Очевидно, что всякая почти периодическая функция H. Bohr'a удовлетворяет условиям I и II

Напротив, функция

$$\frac{1}{e^{i\lambda_1 x} + e^{i\lambda_2 x} + 2},$$

где $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ — иррациональное число, не почти периодическая в смысле H. Bohr'a, однако удовлетворяет условиям I и II.

Имеет место следующая

Теорема I. *Если функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *удовлетворяют условиям* I *и* II, *то функции*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x), \quad f_1(x) f_2(x)$$

(c_1, c_2 — *комплексные числа) также удовлетворяют этим условиям.*

Предположим теперь, что функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2 \, dx < \infty, \tag{1}$$

и пусть для всех действительных λ существуют средние значения

$$a(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\lambda x} dx. \tag{2}$$

Тогда, как известно, функции $f(x)$ можно сопоставить ряд Fourier

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}.$$

Будем называть, как обычно, числа A_n коэффициентами Fourier функции $f(x)$, а числа Λ_n показателями Fourier функции $f(x)$.

Мы теперь в состоянии сформулировать основную теорему.

Теорема II. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям* I *и* II. *Предположим, что имеет место соотношение* (1) *и для всех действительных λ существуют средние значения* (2). *Тогда, каковы бы ни были числа $\varepsilon > 0$ и $N > 0$, можно указать тригонометрический полином $P(x)$, для которого*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon,$$

если $|x| < N$.

Причем показатели полинома $P(x)$ суть показатели Fourier функции $f(x)$, а коэффициенты $P(x)$ получаются из соответствующих коэффициентов Fourier функции $f(x)$, умножением на некоторые числа [*зависящие от $f(x)$*].

Из этой теоремы и теоремы I непосредственно следует

Теорема III (теорема единственности). *Если две непрерывные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, удовлетворяющие условиям* I *и* II *и соотношению* (1), *имеют одинаковые ряды Fourier, то они тождественно равны.*

Заметим, что все перечисленные результаты легко распространяются на функции, интегрируемые в смысле Lebesgue'а.

Институт математики и механики.
Харьковский государственный университет
им. Горького.

Поступило
X 1937.