Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 6

МАТЕМАТИКА

Академик АН УССР М. Ф. КРАВЧУК

ОБ АППРОКСИМАЦИЯХ В ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

В предыдущей заметке* установлен следующий результат.

При обозначениях

$$\zeta_k = \int\limits_{\alpha}^{\alpha+S} \cos k\pi \frac{x-\alpha}{S}\, dQ(x) - \int\limits_{\alpha}^{\alpha+S} \cos k\pi \frac{x-\alpha}{S}\, dP(x)$$

$$(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m),$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — неотрицательные, неубывающие на интервале $(\alpha,\ \alpha + S)$ функции, имеет место неравенство:

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{x} dQ(x) - \int\limits_{\alpha}^{x} dP(x) \right| < \left(\frac{SM[p]}{m} + \zeta \right) (A + B \log n) \tag{1}$$

$$(\alpha \leqslant x \leqslant \alpha + S).$$

Здесь

$$p = \frac{dP}{dx},$$

$$M[p] = \limsup |p(x)| \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \alpha + S),$$

$$\zeta \geqslant |2\zeta_k| \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m),$$

A и B — две абсолютные постоянные.

В настоящей заметке дается аналогичный результат для случая функций двух переменных. Пусть в прямоугольнике с вершинами:

$$(\alpha,\ \beta),\ (\alpha + S,\ \beta),\ (\alpha + S,\ \beta + T),\ (\alpha,\ \beta + T), \tag{2}$$

функции $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ неотрицательны и удовлетворяют условиям:

$$\Delta^2_{xy} P \geqslant 0,\quad \Delta^2_{xy} Q \geqslant 0.$$

Введем обозначения

$$\varepsilon_{kl} = \int\limits_{\alpha}^{\alpha+S} \int\limits_{\beta}^{\beta+T} \cos k\pi \frac{x-\alpha}{S} \cos l\pi \frac{y-\beta}{T} (d^2_{xy} Q - d^2_{xy} P) \tag{3}$$

$$(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m)$$
$$(l = 0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

---

* ДАН, XIV, № 3, 91 (1937). В этой заметке следует произвести следующие исправления: 1) на стр. 93, строки 4—21 опустить как излишние и в общем случае неверные, 2) на стр. 94, в десятой строке снизу вместо $0 < \delta \leqslant 1$ читать: $0 < \delta < 1$.

Тогда

$$\left|\int_\alpha^x\int_\beta^y d^2_{xy}Q-\int_\alpha^x\int_\beta^y d^2_{xy}P\right|\leqslant\left\{\frac{S}{m}M\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]+\frac{T}{n}M\left[\frac{\partial P}{\partial y}\right]+\varepsilon\right\}\cdot$$
$$\cdot(A+B\log m)(A+B\log n) \tag{4}$$
$$(\alpha\leqslant x\leqslant\alpha+S,\ \ \beta\leqslant y\leqslant\beta+T),$$

где

$$M\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right],\quad M\left[\frac{\partial P}{\partial y}\right]$$

представляют соответственно верхние пределы функций

$$\left|\frac{\partial P}{\partial x}\right|,\qquad\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|$$

в прямоугольнике (2), ε — любое число, удовлетворяющее требованию:

$$\varepsilon\geqslant|4\varepsilon_{kl}|,$$

A и B — абсолютные постоянные.

Для доказательства результата (4) введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned}Q_l(x)&=\int_\beta^{\beta+T}\left(1+\cos l\pi\frac{y-\beta}{T}\right)\int_\alpha^x d^2_{xy}Q,\\ P_l(x)&=\int_\beta^{\beta+T}\left(1+\cos l\pi\frac{x-\alpha}{S}\right)\int_\alpha^x d^2_{xy}P\\ &(l=0,\ 1,\ \ldots,\ n).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Очевидно $P_l(x)$, $Q_l(x)$ на интервале $(\alpha,\ \alpha+S)$ — неотрицательные, неубывающие функции. Тогда из равенств (3) имеем:

$$\int_\alpha^{\alpha+S}\cos k\pi\frac{x-\alpha}{S}\left\{dQ_l(x)-dP_l(x)\right\}=\varepsilon_{kl}+\varepsilon_{k0}$$
$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ m).$$

Введя обозначение:

$$\eta_l(x)=\int_\alpha^x dQ_l(x)-\int_\alpha^x dP_l(x), \tag{6}$$

на основании формулы (1) получаем:

$$|\eta_l(x)|<\left(\frac{SM\left[\frac{\partial P_l}{\partial x}\right]}{m}+\varepsilon_l\right)(A+B\log m). \tag{7}$$

Здесь ε_l есть любое число, не меньшее, чем числа

$$|2\varepsilon_{0l}+2\varepsilon_{00}|,\ \ |2\varepsilon_{1l}+2\varepsilon_{10}|,\ \ldots,\ |2\varepsilon_{ml}+2\varepsilon_{m0}|.$$

Формула (7) дает возможность написать равенства:

$$\int_\beta^{\beta+T}\cos l\pi\frac{y-\beta}{T}\left(\int_\alpha^x d^2_{xy}Q-\int_\alpha^x d^2_{xy}P\right)=\eta_l(x)+\frac{1}{2}\eta_0(x) \tag{8}$$
$$(l=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Отсюда, применяя вторично неравенство (1), получаем:

$$\left|\int_{\alpha}^{x}\int_{\beta}^{y} d_{xy}^2 Q - \int_{\alpha}^{x}\int_{\beta}^{y} d_{xy}^2 P\right| \leqslant \left\{\frac{T}{n} M\left[\frac{\partial P}{\partial y}\right] + \eta\right\} \cdot (A + B \log n), \tag{9}$$

где η — любое число, удовлетворяющее требованию:

$$\eta \geqslant |2\eta_l(x) - \eta_0(x)| \qquad (l = 0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Неравенства (9) и (7) окончательно и дают результат (4).

В случае не обобщенной, а классической проблемы моментов, т. е. когда все числа ε_{kl} — нули, неравенство (4) заменяется таким:

$$\left|\int_{\alpha}^{x}\int_{\beta}^{y} d_{xy}^2 Q - \int_{\alpha}^{x}\int_{\beta}^{y} d_{xy}^2 P\right| \leqslant \left\{\frac{S}{m} M\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right] + \frac{T}{n} M\left[\frac{\partial P}{\partial y}\right]\right\} \cdot$$
$$\cdot (A + B \log m)(A + B \log n)$$
$$(\alpha \leqslant x \leqslant \alpha + S,\ \ \beta \leqslant y \leqslant \beta + T).$$

Нетрудно получить результат, аналогичный неравенству (9′) упоминавшейся выше заметки.

Обобщение на случай любого числа переменных не представляет затруднений.

Поступило
27 IX 1937.