Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 6

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

О НЕКОТОРЫХ ВИДОИЗМЕНЕНИЯХ НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ представляют последовательность случайных величин, обладающих свойством, что условное математическое ожидание $\mathfrak{M}_{(i)} z_{i+1} = 0$, каковы бы ни были значения предшествующих величин $z_1, z_2, \ldots, z_i$. В таком случае дисперсия суммы $\sum_{i=1}^{n} z_i$ равна $B_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$, где $\beta_i = \mathfrak{M} z_i^2$. Относительно суммы величин z_i могут быть установлены следующие предложения.

Теорема I. *Вероятность, что при всех $i \leqslant n$ будут одновременно соблюдены неравенства*

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_i| \leqslant t\sqrt{B_n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

больше, чем $1 - \frac{1}{t^2}$.

Я не буду останавливаться на доказательстве этой теоремы, являющейся непосредственным усилением неравенства Чебышева, так как оно проще и аналогично доказательству следующей теоремы, соответствующей одному из моих прежних уточнений последнего неравенства.

Теорема II. *Пусть $\beta_{k,k-1} = \mathfrak{M}_{(k-1)} z_k^2$ есть дисперсия z_k при заданных значениях $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$; пусть*

$$\frac{\beta_{k,k-1}}{\beta_k} \leqslant R_k. \tag{2}$$

Если существует такое число H, что

$$\mathfrak{M}_{(k-1)} z_k^l \leqslant \frac{\beta_{k,k-1}}{2} H^{l-2} l!, \tag{3}$$

то вероятность P совмещения неравенств

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_i < 2t\sqrt{B'_n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

больше, чем $1 - e^{-t^2}$,

лишь бы $0 < t \leqslant \frac{\sqrt{B'_n}}{2H}$, где $B'_n = \sum_{k=1}^{n} R_k \beta_k$.

Для доказательства положим $\varepsilon > 0$ и обозначим через Q_i вероятность совмещения неравенства

$$e^{\varepsilon(z_1 + \ldots + z_i)} \geqslant L \tag{5}$$

с неравенствами

$$e^{\varepsilon(z_1 + z_2 + \ldots + z_k)} < L \tag{6}$$

при любом $k < i$. В таком случае

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i \tag{7}$$

представит вероятность, что найдется такое $i \leqslant n$, при котором неравенство (5) осуществится.

Пусть

$$I = \mathfrak{M}\left(e^{\varepsilon(z_1+\ldots+z_n)}\right). \tag{8}$$

Если $z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, \ldots, z_i^{(i)}$ представляет некоторую совокупность значений $z_1, z_2, \ldots, z_i$, удовлетворяющих условию (5) совместно с (6), то соответствующие слагаемые суммы I представятся в виде

$$p_i e^{\varepsilon(z_1^{(i)}+\ldots+z_i^{(i)})}\,\mathfrak{M}_{(i)} e^{\varepsilon(z_{i+1}+\ldots+z_n)},$$

где p_i есть вероятность равенств $z_1 = z_1^{(i)}$, $z_2 = z_i^{(i)}$, $\ldots$, $z_i = z_i^{(i)}$, между тем как условное математическое ожидание $\mathfrak{M}_i e^{\varepsilon(z_{i+1}+\ldots+z_n)} \geqslant 1$ вследствие очевидного неравенства

$$\sum P_k e^{\sigma_k} \geqslant 1,$$

имеющего место при условиях: $\sum P_k = 1$, $\sum P_k \sigma_k = 0$, $P_k \geqslant 0$. Поэтому, беря сумму $I^{(i)}$ всех слагаемых I, удовлетворяющих (5) и (6), и замечая, что $\sum p_i = Q$, заключаем, что

$$I^{(i)} \geqslant L Q_i,$$

а следовательно

$$I \geqslant \sum_{i=1}^{n} I^{(i)} \geqslant L \sum_{i=1}^{n} Q_i = LQ,$$

т. е.

$$Q \leqslant \frac{I}{L}. \tag{9}$$

С другой стороны,

$$\mathfrak{M}_{(i-1)} e^{\varepsilon z_i} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\beta_{i,i-1} + \sum_{l=3}^{\infty} \frac{\varepsilon^l}{l!}\mathfrak{M}_{i-1} z_i^l,$$

и вследствие (3)

$$\mathfrak{M}_{(i-1)} e^{\varepsilon z_i} \leqslant 1 + \beta_{i,i-1} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{2} (\varepsilon H)^{l-2} \leqslant 1 + \varepsilon^2 \beta_{i,i-1} < e^{\varepsilon^2 \beta_{i,i-1}}, \tag{10}$$

полагая

$$\varepsilon H \leqslant \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Поэтому, принимая во внимание (2), находим тем более, что

$$\mathfrak{M}_{(i-1)} e^{\varepsilon z_i} < e^{\varepsilon^2 R_i \beta_i},$$

откуда следует, что

$$I < e^{\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} R_i \beta_i} = e^{\varepsilon i B_n'}. \tag{12}$$

Таким образом на основании (9) имеем

$$Q < \frac{e^{\varepsilon^2 B_n'}}{L}, \tag{13}$$

где Q представляет вероятность, что найдется по крайней мере одно $i \leqslant n$, при котором осуществится неравенство

$$\varepsilon(z_1 + z_2 + \ldots + z_i) \geqslant \log L. \tag{14}$$

Положим

$$\log L = t^2 + \varepsilon^2 B'_n.$$

В таком случае неравенства (14) равнозначны

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_i \geqslant \frac{t^2}{\varepsilon} + \varepsilon B'_n \tag{15}$$

и вероятность Q, что по крайней мере одно из них ($i \leqslant n$) осуществится, удовлетворяет неравенству

$$Q < e^{-t^2}. \tag{16}$$

В частности, полагая $\varepsilon = \frac{t}{\sqrt{B'_n}}$ $\left[\text{причем для соблюдения (11) достаточно, чтобы } t \leqslant \frac{\sqrt{B'_n}}{2H}\right]$, убеждаемся в правильности высказанной теоремы.

Из теоремы II нетрудно вывести распространение «закона повторного логарифма» при $B_{n\to\infty}$ на рассматриваемые в ней величины z_i, в формулировке которого ничего не меняется, когда $R_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Аналогичным образом преобразовываются и другие уточнения неравенства Чебышева, которые указаны в моем курсе теории вероятностей и в статье* «Об одном видоизменении неравенства Чебышева и погрешности формулы Лапласа».

Поступило
14 XI 1937.

* Ученые записки научно-исследовательских кафедр Украины, Отдел математ. (1924).