Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 6

МАТЕМАТИКА

Г. ТОЛСТОВ

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ Д. Ф. ЕГОРОВА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 17 XII 1938)

Теорема Д. Ф. Егорова формулируется следующим образом: *Если последовательность измеримых функций сходится на ограниченном измеримом множестве E, то существует сколь угодно близкое по мере к E множество ε, на котором сходимость равномерна.*

Если рассматривать не последовательность функций $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$, а некоторую функцию $f(x,y)$ переменного x и параметра y, то спрашивается:

Будет ли верна теорема Егорова, если известно, что для всех x, принадлежащих некоторому измеримому множеству E, существует $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=f(x)$. Иными словами, можно ли для всякого $\omega>0$ найти измеримое множество ε, $\varepsilon\subset E$, такое, что $\operatorname{mes}\varepsilon>\operatorname{mes}E-\omega$ и на ε $f(x,y)$ стремится к $f(x)$ при $y\to 0$, равномерно относительно x? Если требовать лишь измеримости $f(x,y)$ (в смысле Лебега) по совокупности переменных x и y или требовать к этому еще измеримость $f(x,y)$ по первому из переменных при фиксированном значении второго и наоборот, то с помощью аксиомы Цермело можно легко построить пример функции $f(x,y)$, для которой поставленный выше вопрос решается в отрицательном смысле. В самом деле, пусть $E_1, E_2, \ldots E_n \ldots$ — система множеств, обладающих следующими свойствами:

$$\operatorname{mes}_e E_n=1 \quad (n=1,2,3,\ldots),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n=[0,1].$$

Такие множества легко строятся с помощью аксиомы Цермело*. Помещаем эти множества на оси OX.

Пусть ε_n $(n=1,2,3,\ldots)$ — положительные числа, стремящиеся к нулю при $n\to\infty$. Если координаты точки единичного квадрата плоскости XOY имеют вид $(x_0\,\varepsilon_n\,x)$, где $x\subset E_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$, то полагаем $f(x,y)=1$.

* См. например Н. Н. Лузин, О строении измеримых функций (Прибавление III к книге Лебега, Интегрирование и отыскание примитивных, Москва, 1934).

Во всех остальных внутренних точках указанного квадрата полагаем $f(x, y) = 0$. Ясно, что для любой точки x, $0 < x < 1$, имеем

$$\lim_{y \to 0} f(x, y) = 0.$$

С другой стороны, ясно, что сходимость не может быть равномерной ни на каком измеримом множестве положительной меры.

Построенная функция равна нулю всюду в единичном квадрате за исключением множества точек, лежащих на счетном множестве прямых. Следовательно она измерима в смысле Лебега по совокупности переменных x и y. При каждом фиксированном y $f(x, y)$ допускает относительно x лишь конечное множество точек разрыва и следовательно измерима по x.

Подобное же заключение делаем, если рассматриваем $f(x, y)$ при фиксированном x.

Другой ответ на поставленный вопрос мы получим, если потребуем для $f(x, y)$ измеримости B.

Мы докажем следующую теорему:

Если $f(x, y)$ определена на B-множестве и на этом множестве измерима B по совокупности переменных x и y и если для всех точек x ограниченного измеримого (вообще говоря, в смысле Лебега) множества E существует $\lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = f(x)$, то существует измеримое множество ε, сколь угодно близкое по мере к E, на котором стремление $f(x, y) \to f(x)$ происходит равномерно относительно x.

Легко видеть, что множество E и $f(x)$ мы можем считать измеримыми B, так как в противном случае мы могли бы вместо E рассматривать равное ему по мере B-множество, на котором $f(x)$ была бы измерима B.

Доказательство. Пусть $\omega > 0$—произвольно малое число. Для каждого $x \subset E$ существует положительное число $\delta'_n(x)$ такое, что

$$|f(x, y) - f(x)| < \frac{1}{n},$$

лишь только $|y| < \delta'_n(x)$.

Полагаем $\delta_n(x) = \sup \delta'_n(x)$ при заданном x и n. Покажем, что $\delta_n(x)$ измерима в смысле Лебега. В самом деле, рассмотрим множество $E[x, \delta_n(x) < A]$. Если x принадлежит к этому множеству, то это означает, что существует такое $y, 0 < y < A$, для которого $|f(x, y) - f(x)| \geqslant \frac{1}{n}$. Обратно, если существует y, $0 < y < A$, для которого $|f(x,y) - f(x)| \geqslant \frac{1}{n}$, то очевидно $x \subset E[x, \delta_n(x) < A]$. Отсюда выводим, что множество $E[x, \delta_n(x) < A]$ представляет собой проекцию на ось OX части множества $E\left[(x, y), |f(x, y) - f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right]$, заключенной в полосе $0 < y < A$. Но функция $|f(x, y) - f(x)|$ измерима B. Следовательно $E\left[(x, y), |f(x, y) - f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right]$ есть B-множество. Проекция B-множества есть всегда A-множество и поэтому измерима по Лебегу. Отсюда следует измеримость $\delta_n(x)$ всюду на $E\,\delta_n(x) > 0$. Поэтому можно найти множество $E_n, E_n \subset E$, $\operatorname{mes} E - \operatorname{mes} E_n < \frac{\omega}{2^n}$, на котором $\delta_n(x) \geqslant \delta_n$, где δ_n— некоторая постоянная, положительная величина.

Положим

$$\mathfrak{s}=\prod_{n=1}^{\infty} E_n,$$

$$\operatorname{mes}(E-\mathfrak{s})=\operatorname{mes}\sum_{n=1}^{\infty}(E-E_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{mes}(E-E_n)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{mes}E-\operatorname{mes}E_n)<\omega.$$

Итак, $\mathfrak{s}$ отличается от E по мере не больше, чем на ω. С другой стороны, на $\mathfrak{s}$ $f(x, y)$ стремится к $f(x)$ равномерно. В самом деле, если $\alpha>0$ задано, то, выбрав n столь большим, чтобы было $0<\frac{1}{n}<\alpha$, будем иметь для всех $x \subset \mathfrak{s} \subset E_n$

$$|f(x, y)-f(x)|<\frac{1}{n}<\alpha,$$

лишь только $|y|<\delta_n$. Теорема доказана.

Заметим, что если в доказанной теореме y стремить не к нулю, а к значению $\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ есть любая, измеримая в смысле Лебега функция, то теорема будет оставаться верной.

Поступило
5 I 1939.