Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 6

МАТЕМАТИКА

М. ПОТОЦКИЙ

СЕМЕЙСТВО КОНГРУЭНЦИЙ С СООТВЕТСТВИЕМ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ И С ФОКУСАМИ, ЛЕЖАЩИМИ НА СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЛУЧАХ ДВУХ КОНГРУЭНЦИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 7 I 1939)

1. Рассмотрим конфигурацию, состоящую из двух конгруэнций M_1M_2 и M_3M_4 (направляющих конгруэнций) и семейства конгруэнций N_1N_2, зависящего от одного параметра, где

$$N_1 = M_1 + \lambda(u, v) M_2,$$
$$N_2 = M_3 + \varphi(\lambda) M_4.$$

Точки N_1 и N_2 являются фокусами конгруэнций семейства N_1N_2; сами конгруэнции семейства соответствуют друг другу развертывающимися поверхностями.

Назовем семейство конгруэнций N_1N_2 семейством H и исследуем полученную конфигурацию с помощью подвижного тетраэдра ([1]). За ребра подвижного тетраэдра примем: M_1M_2 и M_3M_4 — соответственные лучи двух направляющих конгруэнций и M_1M_3 и M_2M_4 — соответственные лучи двух произвольных конгруэнций семейства H.

Разложения производных от координат вершин тетраэдра имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}(M_i)_u &= \sum_{k=1}^{4} a_i^k M_k \\ (M_i)_v &= \sum_{k=1}^{4} b_i^k M_k\end{aligned}\right\} \quad (i, k = 1 \ldots 4), \tag{1}$$

где компоненты a_i^k и b_i^k удовлетворяют 16 условиям совместности

$$(a_i^k)_v - (b_i^k)_u = \sum (b_i^j a_j^k - a_i^j b_j^k) \qquad (j = 1 \ldots 4). \tag{2}$$

Относя конгруэнции семейства к их развертывающимся поверхностям, найдем для первой вершины тетраэдра

$$M_{1u} = a_1^1 M_1 + a_1^3 M_3,$$

и аналогично для остальных это дает

$$a_1^2 = a_1^4 = a_2^1 = a_2^3 = 0,$$
$$b_3^2 = b_3^4 = b_4^1 = b_4^3 = 0.$$

Уравнения задачи будут

$$(N_1)_u = AN_1 + BN_2,$$
$$(N_2)_v = CN_1 + DN_2,$$

откуда после исключения коэффициентов A, B, C, D и нормирования одной из вершин найдем

$$\left.\begin{aligned} a_1^3 = a_2^4; \quad b_3^1 = b_4^2; \\ \varphi(\lambda) = \lambda; \\ \lambda_u = \lambda(a_1^1 - a_2^2); \\ \lambda_v = \lambda(b_3^3 - b_4^4). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Условия совместности для λ дают

$$(a_1^1 - a_2^2)_v = (b_3^3 - b_4^4)_u. \tag{4}$$

Произвол рассматриваемой конфигурации, определяемой уравнениями (2), (3), (4), выражается двумя функциями двух аргументов.

2. Произвольная конгруэнция может быть включена в семейство H. Отнесем ее к тетраэдру Wilczynski'го $P_1P_2P_3P_4$, который характеризуется выбором вершин P_1 и P_3 в точках P_{2v} и P_{4u}.

Выберем тетраэдр $M_1M_2M_3M_4$ так, чтобы его вершины M_2 и M_4 совпадали с P_2 и P_4, а две другие определялись по формулам

$$M_1 = A_1P_1 + A_2P_2 + A_3P_3 + A_4P_4,$$
$$M_3 = B_1P_1 + B_2P_2 + B_3P_3 + B_4P_4.$$

Требуя, чтобы лучи M_1P_2 и M_3P_4 были соответствующими лучами двух направляющих конгруэнций семейства H, находим A_i и B_i $(i = 1 \ldots 4)$, что возможно с произволом семи функций одного аргумента.

3. Направляющие конгруэнции могут быть параболическими. Требуя, чтобы уравнения, определяющие положение фокусов направляющих конгруэнций M_1M_2 и M_3M_4, имели двойной корень, приходим к условиям:

$$(b_2^4 - b_1^3)^2 + 4b_2^3b_1^4 = 0,$$
$$(a_3^1 - a_4^2)^2 + 4a_3^2a_4^1 = 0.$$

Дифференцируя их и присоединяя к уравнениям, определяющим конфигурацию, убеждаемся в справедливости высказанного утверждения. Произвол определяется в 15 функций одного аргумента. Если

$$b_2^4 - b_1^3 = 0 \quad b_1^4 = 0,$$
$$a_3^1 - a_4^2 = 0 \quad a_3^2 = 0,$$

то приходим к случаю двух параболических направляющих конгруэнций, принадлежащих специальному линейному комплексу, с общей фокальной поверхностью, выродившейся в ось этого комплекса. Эта конфигурация существует с произволом в 2 функции двух аргументов.

4. Пара конгруэнций называется двухсторонне-расслояемой, если каждый луч первой конгруэнции пересекает ∞^1 поверхностей, причем касательные плоскости к этим поверхностям (проведенные в точках пересечения с лучом) проходят через соответственный луч второй конгруэнции и наоборот.

Расслаивая направляющие конгруэнции с помощью фокальных поверхностей семейства H, приходим к условиям:

$$b_2^1 = b_1^2 = a_4^3 = a_3^4 = 0,$$
$$a_1^1 - a_2^2 = a_3^3 - a_4^4, \quad b_1^1 - b_2^2 = b_3^3 - b_4^4,$$

при этом любая пара конгруэнций семейства H оказывается в соответствии T (1), а конгруэнции семейства принадлежат линейным комплексам.

Обратно: если какая-нибудь пара конгруэнций семейства H (напр. M_1M_3 и M_2M_4) находится в соответствии T, то и любая пара конгруэнций этого семейства находится в соответствии T, а направляющие конгруэнции расслоены поверхностями семейства.

5. Конфигурация Ionas'a (1) состоит из четырех конгруэнций, две из которых M_1M_3 и M_2M_4 суть конгруэнции R и соответствуют друг другу развертывающимися поверхностями, а две другие M_1M_2 и M_3M_4 суть конгруэнции W. Включая конгруэнции R в семейство H, находим, что фокальные поверхности конгруэнций M_1M_3 и M_2M_4, т. е. M_1 и M_3 и соответственно M_2 и M_4,—линейчатые, причем каждая пара M_1 и M_2; M_3 и M_4 представляет собой одну и ту же линейчатую поверхность; лучи конгруэнций семейства H суть их общие касательные.

6. Лучи конгруэнций семейства H, пересекающие два соответственных луча двух направляющих конгруэнций, представляют собой одно семейство образующих поверхности второго порядка, проходящей через соответственные лучи направляющих конгруэнций. Эта поверхность второго порядка касается по этим лучам двух направляющих конгруэнций.

С помощью семейства ∞^2 таких поверхностей осуществляется преобразование одной конгруэнции в другую, вопрос о котором был поставлен С. П. Финиковым.

7. Случай взаимного пересечения соответственных лучей направляющих конгруэнций M_1M_2 и M_2M_3 характеризуется равенствами:

$$a_1^4 = a_2^4 = 0, \quad b_2^4 = b_3^4 = 0, \quad a_1^3 = b_3^1 = 0.$$

Произвол конфигурации определяется в 3 функции двух аргументов.

Если кроме того выполнено условие $a_2^1 = b_2^3 = 0$, то последовательность $(M_1M_2)-(M_2M_3)$ есть последовательность Laplace'a, а конгруэнция семейства N_1N_2, где

$$N_1 = M_1 + \lambda M_2, \quad N_2 = M_3 + \varphi(\lambda) M_2,$$

есть звено вписанной последовательности Laplace'a. Параметр λ определяется из одного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных. Произвол конфигурации — 2 функции двух аргументов.

Соответственные лучи направляющих конгруэнций (в случае их взаимного пересечения) не могут быть касательными к асимптотическим линиям на их общей фокальной поверхности (M_2) без того, чтобы эта поверхность (M_2) не выродилась в плоскость. Следовательно направляющие конгруэнции не могут быть параболическими.

8. Конфигурация, состоящая из семейства параболических конгруэнций, соответствующих друг другу развертывающимися поверхностями и имеющих фокусы на лучах единственной направляющей конгруэнции, характеризуется произволом в 4 функции двух аргументов.

Два параметра, определяющих положение луча конгруэнции семейства, определяются из системы двух уравнений в частных производных первого порядка.

Институт математики
Московского государственного университета.

Поступило
8 I 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия (1937); S. Finikoff, Annali di Pisa, сер. 2, 2 (1933).