Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 7

ГЕОФИЗИКА

И. КИБЕЛЬ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ФРОНТА В АТМОСФЕРЕ *

(*Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 15 I 1937*)

Мы рассматриваем движение двух воздушных масс, отделенных друг от друга фронтальной поверхностью, сопровождающееся нелинейными деформациями и перемещениями этой поверхности. Движения предполагаются «зональными», т. е. предполагается, что все метеорологические элементы, так же как и уравнение поверхности фронта, зависят только от двух координат (y, z) и времени (t). Учитывается действие силы тяжести и силы Кориолиса; принимается в расчет наличие поверхности земли, каковая считается плоскостью.

Мы отбрасываем вертикальное ускорение $\frac{\partial w}{\partial t}$ по сравнению с ускорением силы тяжести (g) и считаем, что горизонтальные компоненты скоростей не зависят от z (вертикальная координата). Никаких других ограничений мы не делаем: движение может быть вихревым, плотность—переменной, а среда—баротропной или бароклинной.

Уравнения движения принимают вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} - 2\omega v_i = 0,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} + 2\omega u_i = -\frac{\partial q_i}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial y},$$

$$g = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial z},$$

где p_i—давление, ρ_i—плотность, ω—проекция на ось z угловой скорости вращения земли, $q_i = q_i(y,t)$—новая неизвестная функция, $i = 1$ для «теплой» массы, $i = 2$—для «холодной» массы.

Тогда p_i и ρ_i могут быть определены из соотношений:

$$p_i = \pi_i(q_i - gz;\ t); \qquad \rho_i = \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}.$$

* Сокращенное изложение работы, которая будет напечатана полностью в «Трудах Главной геофизической обсерватории» (Ленинград).

где $\pi_i(q_i - gz;\ t)$—произвольные функции своих двух аргументов, характеризующие состояние воздуха в той и другой средах. Уравнение неразрывности позволяет определить w_1 и w_2 в виде

$$g\rho_1 w_1 = \frac{\partial}{\partial t}[\pi_1(q_1 - gz;\ t) - \pi_1(q_1;\ t)] + \frac{\partial}{\partial y} v_1(y, t)[\pi_1(q_1 - gz;\ t) - \pi_1(q_1;\ t)],$$

$$g\rho_2 w_2{}^* = \frac{\partial}{\partial t}\pi_2(q_2 - gz;\ t) + \frac{\partial}{\partial y}[v_2(y, t)\pi_2(q_2 - gz;\ t)].$$

Наличие фронтальной поверхности приводит к условиям:

$$\pi_1(q_1 - g\zeta;\ t) = \pi_2(q_2 - g\zeta;\ t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\pi_1(q_1 - g\zeta;\ t) - \pi_1(q_1;\ t)] = -\frac{\partial}{\partial y} v_1(y, t)[\pi_1(q_1 - g\zeta;\ t) - \pi_1(q_1;\ t)],$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\pi_2(q_2 - g\zeta;\ t) = -\frac{\partial}{\partial y}[v_2(y, t)\pi_2(q_2 - g\zeta;\ t)],$$

где $z = \zeta(y, t)$—неизвестное уравнение фронтальной поверхности, и это позволяет ввести две функции $\psi_1(y, t)$, $\psi_2(y, t)$ из соотношений:

$$\pi_1(q_1;\ t) - \pi_1(q_1 - g\zeta;\ t) = \frac{\partial\psi_1}{\partial y};\quad v_1\frac{\partial\psi_1}{\partial y} = -\frac{\partial\psi_1}{\partial t};$$

$$\pi_2(q_2;\ t) = \frac{\partial\psi_2}{\partial y};\quad v_2\frac{\partial\psi_2}{\partial y} = -\frac{\partial\psi_2}{\partial t},$$

при этом u_i могут быть найдены по формуле

$$u_i = 2\omega y + \Phi_i(\psi_i),$$

где Φ_i—функция, определенная начальными данными.

Задача сводится к решению системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[-RT_0\left(1 - \frac{p}{p_0}\right) + v_1^2\right]\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2} - RT_0\left(1 - \frac{p}{p_0}\right)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2} + 2v_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t\partial y} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} = \\
&\qquad = 2\omega u_1 p_0\left(1 - \frac{p}{p_0}\right), \\
&-RT_0\frac{p}{p_0}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2} + \left[-R\left(T_0\frac{p}{p_0} + T_2 - T_1\right) + v_2^2\right]\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2} + \\
&\qquad + 2v_2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y\partial t} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} = 2\omega u_2 p,
\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

где R—газовая постоянная, $p_0(y, t)$ и $T_0(y, t)$—давление и температура на поверхности земли, $p = p(y, t)$—давление вдоль фронтальной поверхности, $T_1(y, t)$ и $T_2(y, t)$—температура в первой и второй массах вдоль фронтальной поверхности $\Big($все эти функции определяются через $\frac{\partial\psi_1}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi_2}{\partial y}$, t, коль скоро π_i известны, как функции своих аргументов$\Big)$. Система (A) есть система гиперболического типа, имеющая, в условиях метеорологически интересных, 4 семейства действительных характери-

* Мы предполагаем, что вторая среда ограничена фронтом, свободной поверхностью и поверхностью земли.

стик. В плоскости (y, t) направление $\frac{dy}{dt}$ характеристик следует находить из алгебраического уравнения 4-й степени:

$$\left(\frac{dy}{dt}-v_1\right)^2\left(\frac{dy}{dt}-v_2\right)^2-R\left[\left(\frac{dy}{dt}-v_1\right)^2\left(T_0\frac{p}{p_0}+T_2-T_1\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{dy}{dt}-v_2\right)^2T_0\left(1-\frac{p}{p_0}\right)\right]-R^2T_0\left(1-\frac{p}{p_0}\right)(T_2-T_1)=0.$$

Два из корней этого уравнения имеют величину порядка 10^2 м/сек., два других—10^0—10^1 м/сек. Характеристики, отвечающие этим последним корням, можно взять за новые линии координат (λ, μ). При этом производные по времени от четырех функций

$$p_0,\quad p,\quad \varepsilon=\frac{v_1+v_2}{2},\quad v=\frac{v_2-v_1}{2},$$

взятые вдоль λ и вдоль μ, связаны будут четырьмя соотношениями:

$$\left[\xi^3-2v\xi^2-RT_0\xi+2RT_0v\left(1-\frac{p}{p_0}\right)\right]\left(\frac{d\ln p}{dt}\right)_{\lambda,\mu}+RT_0\xi\left(\frac{d\ln p_0}{dt}\right)_{\lambda,\mu}+$$
$$+\xi^2\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\lambda,\mu}+\left[\xi^2-2RT_0\left(1-\frac{p}{p_0}\right)\right]\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\lambda,\mu}=$$
$$=2\omega\left[(u_2-u_1)RT_0\left(1-\frac{p}{p_0}\right)-u_2\xi^2\right];$$

$$(2v-\eta)\left(\frac{d\ln p}{dt}\right)_\lambda+\left(\frac{d(\varepsilon+v)}{dt}\right)_\lambda=(2v-\xi)\left(\frac{d\ln p}{dt}\right)_\mu+\left(\frac{d(\varepsilon+v)}{dt}\right)_\mu;$$

$$[R(T_2-T_1)-\xi(\xi+\eta)+2v(\eta+2\xi)-4v^2]\left(\frac{d\ln p}{dt}\right)_\lambda+$$
$$+R\left(\frac{d\ln p_0}{dt}\right)_\lambda+\xi\left(\frac{d(\varepsilon+v)}{dt}\right)_\lambda+2\omega u_2\xi=$$
$$=[R(T_2-T_1)-\eta(\xi+\eta)+2v(\xi+2\eta)-4v^2]\left(\frac{d\ln p}{dt}\right)_\mu+$$
$$+R\left(\frac{d\ln p_0}{dt}\right)_\mu+\eta\left(\frac{d(\varepsilon+v)}{dt}\right)_\mu+2\omega u_2\eta,$$

где

$$\xi=\left(\frac{dy}{dt}\right)_\lambda-\sigma_2,\qquad \eta=\left(\frac{dy}{dt}\right)_\mu-v_2.$$

Благодаря наличию этих соотношений мы можем дать эффективный метод численного решения задачи Коши для нашей системы уравнений (A). Коль скоро известна форма фронтальной поверхности и скорости u_i, v_i и p_0 в начальный момент времени, можно определить движение воздушных масс и вид фронтальной поверхности для любого последующего момента времени t.

Группа географии и геофизики.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
15. I. 1937.