Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 6

МАТЕМАТИКА

Г. С. ЧОГОШВИЛИ

ИЗМЕНЕНИЕ ЧИСЕЛ ВЕТТI ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 27 XII 1938)

Пусть R—замыкание ограниченной области риманового или эвклидового пространства, граница которого B—регулярное $(n-1)$-мерное многообразие класса C'''; f—определенная на R, невырожденная функция класса C'', все критические точки которой лежат внутри R и которая индуцирует на B невырожденную функцию f_b. R, B, f, f_b удовлетворяют следовательно общим граничным условиям, о которых, как и о других здесь употребляемых понятиях, см. нижеуказанные работы Morse'a.

При этих условиях мы докажем, что если сегмент $[a, b]$ не содержит критических значений ни f, ни f_b, то поверхности уровня $f=a$ и $f=b$ гомеоморфны; если же в этом сегменте имеется единственное критическое значение c, $a<c<b$, функции f, которое соответствует критической точке индекса k, но не имеется критических значений f_b, то для разностей Δp^i между числами Betti одних и тех же размерностей поверхностей уровня $f=b$ и $f=a$ имеем один из следующих четырех возможных случаев:

$$\text{I. } \Delta p^{k-1}=-1,\ \Delta p^{n-k-1}=1; \qquad \text{II. } \Delta p^{k-1}=\Delta p^{n-k}=-1;$$
$$\text{III. } \Delta p^{k}=\Delta p^{n-k-1}=1; \qquad \text{IV. } \Delta p^{k}=1;\ \Delta p^{n-k}=-1;$$

для остальных i: $\Delta p^i=0$ в каждом из четырех случаев.

При $k=0$, т. е. в точке minimum'a, всегда имеем III случай; при $k=n$, т. е. в точке maximum'a,—II случай.

Замечание I. При $n=2k+1$, $2k$, $2k-1$, когда вышеуказанные две пары чисел $(k-1, k)$ и $(n-k-1, n-k)$ перекрываются, имеем одну из следующих возможностей:

при $n=2k+1$: или $\Delta p^k=1$ и $\Delta p^{k+1}=-1$, или $\Delta p^k=2$, или $\Delta p^{k-1}=\Delta p^{k+1}=-1$, или $\Delta p^{k-1}=-1$ и $\Delta p^k=1$;

при $n=2k$: $\Delta p^{k-1}=\Delta p^k=$ или 0, или 1, или -1;

при $n=2k-1$: или $\Delta p^{k-1}=-1$ и $\Delta p^k=1$, или $\Delta p^{k-1}=-2$, или $\Delta p^{k-2}=\Delta p^k=1$, или $\Delta p^{k-2}=1$ и $\Delta p^{k-1}=-1$;

в частности при $n=1$: $\Delta p^0=2$ при $k=0$ и $\Delta p^0=-2$ при $k=n$.

Возможные изменения чисел Betti совпавших размерностей должны быть следовательно алгебраически сложены.

Замечание II. В случае, когда рассматриваемые поверхности уровня суть замкнутые многообразия, в силу теоремы двойственности Poincaré остаются лишь случаи II и III.

В случае совпадения размерностей пользуемся замечанием I; например при $n=2k+1$: или $\Delta p^k=2$, или $\Delta p^{k-1}=\Delta p^{k+1}=-1$.

Нижеприводимая конструкция около границы позволяет распространить на общие граничные условия следующую теорему Morse'а, доказанную им в предположении граничных условий α: при переходе через критическую точку индекса k все числа Betti области меньших значений остаются неизмененными, за исключением или k-ой, которая в этом случае увеличивается на единицу, или $(k-1)$-ой, которая уменьшается на единицу; если критическая точка не проходится, то область остается гомеоморфной самой себе.

Для каждой точки p границы B_c поверхности уровня $f=c$, т. е. поверхности уровня $f_b=c$, где c—не критическое значение f_b, существуют ее окрестность в B_c и число $d_p>0$ такие, что через каждую точку этой окрестности можно провести линию, отрезки которой длины d_p, отсчитанные от B_c вдоль этих линий, без пересечения покроют определенную окрестность точки p в $f=c$ (т. е. образуют поле). Такими линиями при $n=2$ могут быть достаточно короткие концевые отрезки самих линий уровня, при $n>2$ линии пересечения $f=c$ с нормальными к B_c плоскостями; эти плоскости образуют поле в достаточно малой окрестности точки p в R. В силу компактности B_c существует конечное число таких окрестностей, покрывающих B_c, и общее им число $d_c>0$. Этим в $f=c$, вдоль ее границы B_c, создается край ширины d_c; d_c ограничена вдобавок только тем, что край не должен содержать критической точки f, и не только соседние, но и никакие два его отрезка не должны пересекаться. Возьмем $c_1>c$ такое, чтобы сегмент $[c, c_1]$ не содержал критических значений f_b. Тогда существует число $d_c^{c_1}$, удовлетворяющее условию: $0<d_c^{c_1}\leqslant d_{\bar{c}}$, для любого $c\leqslant\bar{c}\leqslant c_1$; в противном случае для любого целого k нашлось бы c_k, $c\leqslant c_k\leqslant c_1$, для которого $f=c_k$ имела бы край ширины $d_{c_k}<\frac{1}{k}$; для предела c_0 этих c_k возьмем такое k_0, что: $d_{c_0}>\frac{1}{k_0}$; тогда для c_k, достаточно близких к c_0, так же $d_{c_k}>\frac{1}{k_0}$, что противоречит допущению. Совокупность краев ширины $d_c^{c_1}$ всех поверхностей уровня от c до c_1 включительно образует край ширины $d_c^{c_1}$ области $c\leqslant f\leqslant c_1$ вдоль той части $B_c^{c_1}$ ее границы, где $c\leqslant f_b\leqslant c_1$.

Возьмем определенное d, $0<d<d_c^{c_1}$, и рассмотрим множество $[d]_c$ точек края поверхности уровня $f=c$, отстоящих от B_c на расстоянии d (по отрезку), и совокупность $\{d\}$ ортогональных к $f=c$ траекторий, исходящих из точек множества $[d]_c$ (при этом представление траекторий таково, что значение параметра t в любой точке траектории равно значению f в этой точке).

Возьмем $c'>c$ так, чтобы ни одна траектория из $\{d\}$ на протяжении от $t=c$ до $t=c'$ включительно не выходила из построенного края, т. е. не встречалась с границей (если бы при любом $c'>c$ существовала траектория из $\{d\}$, встречающая B до c', то существовала бы и такая, которая встречает B при $t=c$, что противоречит тому, что $[d]_c\cdot B=0$), и не удалялась бы от $B_c^{c_1}$ больше, чем на $d_c^{c_1}$ (если бы для любого $c'>c$ в $\{d\}$ существовала траектория, имеющая точку, удаленную от $B\geqslant d_c^{c_1}$, то уже при $t=c$ некоторая траектория из $\{d\}$, т. е. точка из $[d]_c$, была бы удалена от $B_c\geqslant d_c^{c_1}$, что противоречит выбору d); c' можно выбрать так, что ни один отрезок не пересечет $\{d\}$ более одного раза. Множество точек, принадлежащих траекториям из $\{d\}$ от $t=c$ до $t=c'$, разбивает область $c\leqslant f\leqslant c'$ на две части, из которых лежащую в построенном крае назовем внешней, другую — внутренней.

Вполне аналогично найдем $c_2<c$, $d_c^{c_2}$, $c''<c$ и построим край, лежащий под $f=c$; наконец путем объединения над и под $f=c$ лежащих краев создадим край области $c_2\leqslant f\leqslant c_1$ вдоль той части $B_{c_2}^{c_1}$ ее границы, где $c_2\leqslant f_b\leqslant c_1$, и для d: $0<d<d_c^{c_1}$, $d_c^{c_2}$ рассмотрим ортогональные траектории $\{d\}$, находящиеся от $t=c''<c$ до $t=c'>c$ в построенном крае.

Применим эту конструкцию к доказательству нашего утверждения. Ранее полученное c' можем взять настолько близким к c, чтобы в $[c,c']$ не было критических значений f. Ортогональные к $f=c$ траектории, исходящие из внутренних точек $f=c$, продолженные до $t=c'$, заполнят без пересечения внутреннюю часть области $c\leqslant f\leqslant c'$. Если начальной точке каждой из этих траекторий приведем в соответствие концевую, получим гомеоморфное отображение внутренней части $f=c$ на таковую же часть $f=c'$. Возьмем любую точку внешней части $f=c$; она лежит на определенном отрезке края $f=c$ и делит часть этого отрезка от B_c до $\{d\}$ в определенном отношении k. В конце рассматриваемой части отрезка начинается определенная траектория из $\{d\}$; в каждой точке $\bar{c}$ от c до c' этой траектории проходит определенный отрезок края поверхности $f=\bar{c}$; возьмем точку, которая делит в отношении k часть этого отрезка от B_c до рассматриваемой траектории; множество всех таких точек, т. е. соответствующих всем $\bar{c}$ от c до c', образует линию, которую назовем k-линией. Множество всех k-линий, т. е. соответствующих всем внешним точкам $f=c$, без пересечения заполнит внешнюю часть области $c\leqslant f\leqslant c'$. Если начало каждой отобразить на конец, то получаем гомеоморфное отображение внешней части $f=c$ на таковую же часть $f=c'$. Этот гомеоморфизм продолжает прежний, чем и получаем топологическое отображение всей $f=c$ на всю $f=c'$. Точно так же найдем $c''<c$ такое, что $f=c''$ и $f=c$ гомеоморфны. Этим соответствующая часть теоремы доказана, ибо в противном случае существовала бы последовательность чисел $a=c_0<c_1<c_2\ldots$, стремящихся к c, $a<c\leqslant b$, такая, что $f=c_i$ гомеоморфна $f=c_k$, но не гомеоморфна $f=c$, для любых i, k; по доказанному существует $c''<c$ такое, что $f=c''$ и $f=c$ гомеоморфны; с другой стороны, $f=c''$ гомеоморфна любой $f=c_i$; но все это противоречит допущенному.

Чтобы распространить соответствующую часть вышеуказанной теоремы Morse'а на общие граничные условия, построим край и ортогональные траектории $\{d\}$ от c'' до c': $c''<c<c'$; точку из $f\leqslant c''$ отображаем саму на себя; точка из $c''\leqslant f\leqslant c$ лежит или на ортогональной траектории или на k-линии и делит свой носитель от c'' до c в отношении l; ей приведем в соответствие точку из $c''\leqslant f\leqslant c$, которая имеет тот же носитель и которая делит его от c'' до c' в том же отношении l. Этим $f\leqslant c$ гомеоморфно отобразится на $f\leqslant c'$. Далее, как в случае поверхностей уровня.

Переходя к критической точке индекса $k=1, 2, \ldots, n-1$, допустим, что она начало и ей соответствует значение $f=0$. Возьмем числа $e>\varepsilon>0$ настолько малыми, чтобы край области $-e^2\leqslant f\leqslant e^2$ содержал траектории $\{d\}$ от $-e^2$ до e^2, чтобы в сегменте $[-e^2, e^2]$ кроме нуля не было ни одного критического значения f и множество $E[f\leqslant e^2, p^2=\varepsilon^2]$ ($E[\ldots]$

означает множество точек, которые выполняют условия записанные в скобках) лежало бы внутри той окрестности начала, которая не пересекается с построенным краем и внутри которой при определенной системе координат имеем представление $f=-x_1^2-\ldots=x_h^2+x_{h+1}^2+\ldots+x_n^2=-p^2+q^2$.

Рассмотрим множество $K=E[f=e^2]+E[f<e^2, p^2=\varepsilon^2]$ и его подмножества $K'=E[f=e^2, p^2>\varepsilon^2]+E[f\leqslant e^2, p^2=\varepsilon^2]$ и $K''=E[f=e^2]$.

K' получается из K'' с помощью операции, которая производится внутри рассматриваемой окрестности начала и которая оставляет границу неизменной.

Из доказательства леммы 2 нижеуказанной статьи ([2]) заключаем, что ортогональная траектория, входящая в область между $f=-e^2$ и K' в точке K', выходит первый раз из этой области в точке $f=-e^2$, если только на пути не встречает граничных точек. Но последнее требование выполняется для тех траекторий этой области, которые проходят в ее внутренней части; внешняя же часть заполнена k-линиями. Это позволяет гомеоморфно отобразить $f=-e^2$ на K' и $f\leqslant -e^2$ на $E[f\leqslant e^2, p^2\geqslant \varepsilon^2]$. Второй из этих гомеоморфизмов распространяет доказательство ([2]), ([3]) оставшейся у нас недоказанной части вышеупомянутой теоремы Morse'а на общие граничные условия. Первый сводит интересующий нас вопрос к сравнению K' с K''. Имеем $K=K'+E\ [f=e^2, p^2<\varepsilon^2]=K''+E[f<e^2, p^2=\varepsilon^2]$.

$E[f=e^2, p^2<\varepsilon^2)$ представляет топологическое произведение k-мерного шара (без границы) a_k с $(n-k-1)$-мерной сферой $S_{n-k-1}:(a_kS_{n-k-1})$; $E[f<e^2, p^2=\varepsilon^2]$ — произведение $(k-1)$-мерной сферы S_{k-1} с $(n-k)$-мерным шаром (без границы) $b_{n-k}:(S_{k-1}b_{n-k})$. S_{h-1}, соотв. S_{n-h-1}, суть границы a_k, соотв. b_{n-k}, и предполагаются разбитыми на клетки a_1, $i=0, 1, \ldots, k-1$, соотв. b_j, $j=0, 1, \ldots, n-k-1$, так что существуют ровно две клетки данной размерности (a_i', a_i'', соотв. b_j', b_j'') и обе содержатся в любой клетке высшей размерности. Возможность такого представления заключаем из [([3]), § 13—14].

Таким образом $K=K'+(a_kb_j')+(a_kb_j'')$, $j=0, 1, \ldots, n-k-1$;

$$K=K''+(a_i'b_{n-k})+(a_i''b_{n-k}), \quad i=0, 1, \ldots, k-1.$$

Обозначим соответственно через $\alpha_i, \alpha_i', \alpha_i''$ числа i-мерных клеток, через H_i, H_i', H_i'' — матрицы инцидентности, через $\rho_i, \rho_i', \rho_i''$ — ранги последних, через $p^i, p^i_{\mathrm{I}}, p^i_{\mathrm{II}}$ — числа Betti комплексов K, K', K''; все это по мод. 2. K и K' не различаются клетками размерностей $\leqslant k-1$, следовательно $H_i\equiv H_i'$, для $i=0,1,\ldots,k-1$. Для $i=k, k+1,\ldots, n-1$, например для $i=k+j$, $j=0,1,\ldots, n-k-1$, имеем соотношение (см. след. стр.) между H_{k+j} и H_{k+j}' (в случае $j=0$ последние две строки отсутствуют):

Преобразованиями, не меняющими ранг, можно добиться, чтобы в случае $j=0$ в последних двух столбцах везде стояли нули за исключением места, где предпоследний столбец пересекается с третьей снизу строкой, где будет единица: в случае же $j=1, 2, \ldots, n-k-1$ в последних двух строках и двух столбцах везде стояли нули за исключением места пересечения предпоследних, где будет стоять единица.

Имеем следовательно

$\alpha_i=\alpha_i'$, $i=0,1,\ldots,k-1$ и $\alpha_i=\alpha_i'+2$, $i=k, k+1, \ldots, n-1$;

$\rho_i=\rho_i'$, $i=1, 2, \ldots, k-1$;

$\rho_k=$ или ρ_k', или $\rho_k'+1$;

$\rho_i=\rho_i'+1$, $i=k+1, \ldots, n-1$.

H_{k+j}	$x \ldots x$	$(a_k b'_j)$	$(a_k b''_j)$
y	H'_{k+j}	0	0
.		.	.
.		.	.
.		.	.
y		0	0
$(a'_{k-1} b'_j)$		1	0
$(a''_{k-1} b'_j)$		1	0
$(a'_{k-1} b''_j)$		0	1
$(a''_{k-1} b''_j)$		0	1
$(a_k b'_{j-1})$	$0 \ldots 0$	1	1
$(a_k b''_{j-1})$	$0 \ldots 0$	1	1

Аналогично найдем:

$\alpha_i = \alpha''_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-k-1$ и $\alpha_i = \alpha''_i + 2, \quad i = n-k, \ldots, n-1;$

$\rho_i = \rho''_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-k-1;$

$\rho_{n-k} =$ или ρ''_{n-k}, или $\rho''_{n-k} + 1;$

$\rho_i = \rho''_i + 1, \quad i = n-k+1, \ldots, n-1.$

Сопоставление этих двух систем равенств дает значения $\alpha''_i - \alpha_i$ и $\rho''_i - \rho'_i$, а подстановка этих значений в известную формулу $p^i = \alpha_i - \rho_i - \rho_{i+1}$ докажет утверждаемое.

Оставшиеся случаи $k = 0$ и $k = n$ схожи. При $k = 0$ например поверхность уровня $f = e^2$ при достаточно малом e представляется в виде суммы двух непересекающихся множеств; первое состоит из точек, близких к критической точке и удовлетворяющих соотношению $f = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = e^2$, т. е. представляет собой $(n-1)$-мерную сферу; второе гомеоморфно с $f = -e^2$, в чем убеждаемся, создавая край области $-e^2 \leqslant f \leqslant e^2$, заполняя внутреннюю часть, за исключением вычтенных сфер (это вычитание, которое производится для каждой поверхности уровня от 0 до e^2, не влияет на границу), ортогональными траекториями, а внешнюю — k-линиями. $f = b$ топологически тем отличается следовательно от $f = a$, что содержит лишнюю компоненту в виде $(n-1)$-мерной сферы.

Автор глубоко благодарен профессору Л. А. Люстернику за руководство при выполнении этой работы.

Научно-исследовательский институт математики.
Московский государственный университет.

Поступило
5 I 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Marston Morse, The Calculus of Variations in the Large, New York (1934). [2] Marston Morse a. George Booth Van-Schaack, Annals of Math., 35, 545—571 (1934). [3] Marston Morse, Trans. Amer. Math. Soc., 27, 345—396 (1925).