Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 7

МАТЕМАТИКА

Н. И. АХИЕЗЕР и Б. М. ЛЕВИТАН

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ НЕРАВЕНСТВА Г. БОРА и Ж. ФАВАРА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 4 II 1937)

Неравенство, о котором идет речь, гласит:

Если периодическая (комплексная) функция

$$f(x)=\sum_{k=n}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\qquad (n\geqslant 1)$$

имеет интегрируемую производную $f^{(r)}(x)$ порядка $r\geqslant 1$, удовлетворяющую неравенству

$$|f^{(r)}(x)|\leqslant M,$$

то

$$|f(x)|\leqslant\frac{4}{\pi}K_r\frac{M}{n^r},$$

где

$$K_r=1-\frac{1}{3^{r+1}}+\frac{1}{5^{r+1}}-\ldots<1,$$

если r — число четное, и

$$K_r=1+\frac{1}{3^{r+1}}+\frac{1}{5^{r+1}}+\ldots\leqslant\frac{\pi^2}{8},$$

если r — число нечетное.

Частные случаи этого, принадлежащего Ж. Фавару (1), предложения были найдены Г. Бором (2) и Ж. Фаваром (3) ($r=1$, $n\geqslant 1$) и С. Н. Бернштейном (4) ($r\geqslant 1$, $n=1$).

В настоящей заметке мы хотим показать, что из предложения Ж. Фавара непосредственно вытекает и притом в усовершенствованной форме основная теорема Джэксона (5) о приближении дифференцируемых периодических функций тригонометрическими полиномами.

Возьмем какое-нибудь число θ из интервала $0<\theta<1$ и положим

$$g(t)=\frac{\cos\frac{(1-\theta)t}{\theta}-\cos\frac{t}{\theta}}{\pi t^2},$$

$$\varphi(u)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\leqslant u\leqslant 1-\theta,\\ \frac{1}{\theta}(1-u) & \text{при } 1-\theta\leqslant u\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } u\geqslant 1,\end{cases}$$

$$\varphi(-u)=\varphi(u).$$

Тогда, если $f(x)$ есть интегрируемая (комплексная) функция с периодом 2π и

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx},$$

то

$$\int_0^\infty\left\{f\left(x+\frac{t}{\theta n}\right)+f\left(x-\frac{t}{\theta n}\right)\right\}g(t)\,dt=\sum_{|k|<n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)c_k e^{ikx}=\sigma_n\left\{f;\ \theta\right\}.$$

Если при этом

$$|f(x)|\leqslant M,$$

то

$$|\sigma_n\left\{f;\ \theta\right\}|\leqslant 2M\int_0^\infty|g(t)|\,dt=$$

$$=\frac{4M}{\pi}\int_0^\infty\frac{\left|\sin\frac{(2-\theta)t}{2\theta}\right|\cdot\left|\sin\frac{t}{2}\right|}{t^2}\,dt<\left(2+\frac{2}{\pi}\log\frac{1}{\theta}\right)M. \qquad (1)$$

Теорема. Если периодическая функция $f(x)$ имеет интегрируемую производную $f^{(r)}(x)$ $(r\geqslant 0)$ и если

$$|f^{(r)}(x)|\leqslant M_r,$$

то

$$|f(x)-\sigma_n\left\{f;\ \theta\right\}|\leqslant\frac{A+B\log\frac{1}{\theta}}{(1-\theta)^r}\,\frac{M_r}{n^r}, \qquad (2)$$

где A, B — абсолютные константы, причем

$$A<\frac{12}{\pi}K_r\leqslant\frac{3}{2}\pi,\quad B<\frac{8}{\pi^2}K_r\leqslant 1.$$

Предварительное замечание. Это предложение отличается от теоремы Джэксона тем, что фигурирующий в нем аппроксимирующий тригонометрический полином $\sigma_n\left\{f;\ \theta\right\}$ не зависит от числа производных, которые $f(x)$ имеет *.

* Отметим также простоту построения полинома $\sigma_n\left\{f;\ \theta\right\}$, который является легкой модификацией суммы Л. Дрейера $\sigma_n(x)=\sigma_n\left\{f;\ 1\right\}$.

Доказательство. Из условия теоремы и (1) следует, что

$$|f^{(r)}(x) - \sigma_n\{f^{(r)};\ \theta\}| < M_r + \left(2 + \frac{2}{\pi}\log\frac{1}{\theta}\right) M_r.$$

А так как

$$f^{(r)}(x) - \sigma_n\{f^{(r)};\ \theta\} \sim \sum_{m+1 \leqslant |k| \leqslant n} \left\{1 - \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right\} c_k (ik)^r e^{ikx} + \sum_{|k|>n} c_k (ik)^r e^{ikx},$$

где $m = [n(1-\theta)]$, то в силу неравенства Ж. Фавара

$$|f(x) - \sigma_n\{f;\ \theta\}| < \frac{4}{\pi} K_r \left(3 + \frac{2}{\pi}\log\frac{1}{\theta}\right) \frac{M_r}{(m+1)^r} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi} K_r \left(3 + \frac{2}{\pi}\log\frac{1}{\theta}\right) \frac{1}{(1-\theta)^r} \frac{M_r}{n^r}.$$

Известный прием Джэксона (7) позволяет доказать, что при наличии у производной $f^{(r)}(x)$ модуля непрерывности $\omega_r(\delta)$ имеет место неравенство

$$|f(x) - \sigma_n\{f;\ \theta\}| \leqslant \frac{A' + B'\log\frac{1}{\theta}}{(1-\theta)^{r+1}} \frac{1}{n^r} \omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{3}$$

где A', B' — абсолютные константы, причем

$$A' \leqslant \left(2 + \frac{1}{\pi}\right) A, \quad B' \leqslant \left(2 + \frac{1}{\pi}\right) B.$$

Заметим, что наши оценки остаются в силе и тогда, когда θ зависит от n. Полагая $\theta = \frac{1}{n}$, мы найдем, что

$$\sigma_n\left\{f;\ \frac{1}{n}\right\} = {}_{n-1}(x) = \sum_{|k|<n} c_k e^{ikx}$$

есть отрезок ряда Фурье функции $f(x)$.

В этом случае неравенства (2), (3) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} |f(x) - s_{n-1}(x)| &\leqslant (A + B\log n)\frac{M_r}{(n-1)^r}, \\ |f(x) - s_{n-1}(x)| &\leqslant (A' + B'\log n)\frac{n}{(n-1)^{r+1}}\omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right) \end{aligned}\right\} \quad (n > 1),$$

что в существенном совпадает с известными оценками остатка ряда Фурье дифференцируемой функции.

Заметим далее, что аналогичная модификация других методов суммирования рядов Фурье приводит к тем же результатам.

В качестве примера укажем метод Чезаро-Рисса любого положительного порядка p.

Полагая здесь

$$\varphi(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant u \leqslant 1-\theta, \\ \frac{1}{\theta^p}(1-u)^p & \text{при } 1-\theta \leqslant u \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } u \geqslant 1, \end{cases}$$

$$\varphi(-u) = \varphi(u)$$

и строя $\sigma_n\{f;\ \theta\}$ с помощью новой функции $\varphi(u)$, мы получим неравенства (2), (3), где константы A, B, A', B' зависят только от p, причем грубый подсчет показывает, что

$$A < 15 + \frac{2\pi(4+\pi)}{p} + 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}, \quad B < 1,$$

$$A' \leqslant \left(2+\frac{1}{\pi}\right)A, \quad B' \leqslant \left(2+\frac{1}{\pi}\right)B.$$

Математический институт
Харьковского государственного университета.

Поступило
4 II 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Favard, Matematisk Tidsskrift, 81—94 (1936). [2] H. Bohr, Matematisk Tidsskrift, 77—81 (1935). [3] J. Favard, C. R. **202**, 273—276 (1936). [4] S. Bernstein, C. R. **200**, 1900 (1935). [5] Vallée-Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris (1919) 43—52. [6] Н. Ахіезер, Учені Записки Харківського Державного Університету, № 2—3, 15—22 (1935). [7] Vallée-Poussin, loc. cit., 51—52.