Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 1

ГИДРОДИНАМИКА

Л. СЕДОВ

К ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РЕШЕТОК И НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ПРИВОДЯЩИХСЯ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 16 XI 1937).

§ 1. В настоящей заметке мы указываем формулу, дающую в замкнутом виде эффективное решение задачи об определении непрерывного движения жидкости вне решетки, составленной из нескольких вертикальных рядов горизонтальных прямолинейных отрезков, на которых вертикальная скорость жидкости принимает заданные значения. Таким образом мы даем точное решение задачи о мгновенном движении жидкости с постоянными циркуляциями для решеток, составленных из плоских пластинок, и полное решение задачи о неустановившемся движении жидкости с постоянными циркуляциями для решеток, составленных из тонких слабо изогнутых перьев, в приближенной постановке, которая употребляется в теории тонких крыльев. В частности приводимая формула позволяет легко получить решение плоской задачи о движении тонкого крыла между двумя параллельными стенками или задачи о глиссировании при больших значениях числа Фруда ([1], [2]) слабо изогнутой пластинки по поверхности воды, имеющей конечную глубину, и задачи об ударе пластинок о воду, имеющую конечную глубину.

§ 2. Обозначим через D область в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, представляющую собой внешность системы отрезков, состоящей из p рядов отрезков, для которых $y = m\pi i$; $a_k < x < b_k$ ($k = 1, 2,\ldots,p$; $m = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots, \pm\infty$), и q рядов отрезков, для которых $y = \frac{2n+1}{2}\pi i$; $c_s < x < d_s$ ($s = 1, 2,\ldots,q$; $n = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots,\pm\infty$).

Рассмотрим задачу об определении функции $F(z) = u - iv$ (u и v — проекции на оси координат скорости возмущенного движения жидкости), удовлетворяющей следующим условиям:

1. В области D функция $F(z)$ однозначна голоморфна и имеет период πi, т. е. $F(z + \pi i) = F(z)$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(z) = 0$ (вдали перед решеткой жидкость покоится). $\lim\limits_{x\to-\infty} F(z)$ имеет конечное значение.

3. Вблизи точек a_k и $c_s + \frac{\pi i}{2}$ функция $F(z)$ конечна (конечность скорости жидкости у задних кромок — правило Жуковского). Вблизи точек b_k и $d_s + \frac{\pi i}{2}$ $\int\limits_0^z F(z)\,dz$ конечен.

4. На отрезках $y=0$; $a_k < x < b_k$ $(k=1, 2,\ldots,p)$ и $y=\frac{\pi i}{2}$, $c_s < x < d_s$ $(s=1, 2,\ldots q)$ мнимая часть функции $F(z)$ принимает заданные значения: при подходе сверху — iv_1; при подходе снизу — iv_2 (заданные значения нормальных скоростей).

Решение этой задачи можно получить методом, развитым нами в других работах ([3], [4], [5]).

Введем функцию:

$$g(z)=\sqrt{\prod_{k=1}^{p}\frac{\operatorname{sh}(z-b_k)}{\operatorname{sh}(z-a_k)}\cdot\prod_{s=1}^{q}\frac{\operatorname{ch}(z-d_s)}{\operatorname{ch}(z-c_s)}}.$$

Использовав формулу Cauchy, после простых преобразований получим решение поставленной задачи с помощью формулы:

$$F(z)=-\frac{1}{2\pi g(z)}\left\{\sum_{k=1}^{p}\int_{a_k}^{b_k}(v_1+v_2)g_1(\zeta)\left[\operatorname{cth}(\zeta-z)+1\right]d\zeta+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{q}\int_{c_s+\frac{\pi i}{2}}^{d_s+\frac{\pi i}{2}}(v_1+v_2)g_1(\zeta)\left[\operatorname{cth}(\zeta-z)+1\right]d\zeta\right\}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^{p}\int_{a_k}^{b_k}(v_1-v_2)\left[\operatorname{cth}(\zeta-z)+1\right]d\zeta+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{q}\int_{c_s+\frac{\pi i}{2}}^{d_s+\frac{\pi i}{2}}(v_1-v_2)\left[\operatorname{cth}(\zeta-z)+1\right]d\zeta\right\}. \tag{1}$$

Здесь $g_1(z)$ обозначает значение $g(z)$ при подходе сверху к разрезам области D.

§ 3. При установившемся движении решетки периода iH с поступательной скоростью U_0+iV_0 для проекций суммарной силы, действующей на перья в одном периоде, справедливы следующие формулы:

$$X=\rho H\bar{v}\left(V_0-\frac{\bar{v}}{2}\right);\quad Y=-\rho H\bar{v}U_0, \tag{2}$$

где ρ — плотность жидкости и $\bar{v}$ — абсолютная скорость жидкости при $x=-\infty$. Из формулы (1) имеем:

$$\bar{v}=i\lim_{z=-\infty}F(z)=-\frac{1}{\pi g(-\infty)}\left[\sum_{k=1}^{p}\int_{a_k}^{b_k}(v_1+v_2)g_1(\zeta)\,d\zeta+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{q}\int_{c_s+\frac{\pi i}{2}}^{d_s+\frac{\pi i}{2}}(v_1+v_2)g_1(\zeta)\,d\zeta\right], \tag{3}$$

так как интегралы $\int\limits_{a_k}^{b_k}(v_1-v_2)d\zeta$ и $\int\limits_{c_s+\frac{\pi i}{2}}^{d_s+\frac{\pi i}{2}}(v_1-v_2)d\zeta$, равные расходу жидкости по контурам, охватывающим перья, равны нулю.

§ 4. Если решетка составлена из плоских параллельных пластинок и движется поступательно, то $v_1(x)=v_2(x)=v_0=\text{const}$. В этом случае интегралы в формуле (1) легко вычисляются и мы получаем:

$$F(z)=u-iv=-iv_0\left[1-\frac{g(+\infty)}{g(z)}\right]. \tag{4}$$

Пусть $w_0(z)$ — характеристическая функция обтекания с конечными скоростями у задних кромок неподвижной решетки, составленной из плоских параллельных пластинок. Из формулы (4) получаем:

$$\frac{dw_0}{dz}=u_\infty-i\frac{v_\infty g(+\infty)}{g(z)}, \tag{5}$$

где u_∞ и v_∞ — проекции скорости жидкости при $x=+\infty$.

§ 5. В частном случае $q=0$; $p=1$; $a_1=-a$, $b_1=+a$ формулы (1) и (5) имеют вид:

$$F(z)=-\frac{i}{2\pi}\sqrt{\frac{\operatorname{sh}(z+a)}{\operatorname{sh}(z-a)}}\int\limits_{-a}^{+a}(v_1+v_2)\sqrt{\frac{\operatorname{sh}(a-x)}{\operatorname{sh}(a+x)}}\left[\operatorname{cth}(x-z)+1\right]dx-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{+a}(v_1-v_2)\left[\operatorname{cth}(x-z)+1\right]dx \tag{6}$$

и

$$\frac{dw_0}{dz}=u_\infty-iv_\infty e^{-a}\sqrt{\frac{\operatorname{sh}(z+a)}{\operatorname{sh}(z-a)}}. \tag{7}$$

В этом случае чисто циркуляционное обтекание наподвижной решетки с циркуляцией Γ дается формулой:

$$\frac{dw^*}{dz}=\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{\operatorname{sh}z}{\sqrt{\operatorname{sh}(z-a)\operatorname{sh}(z+a)}}. \tag{8}$$

Обозначив через $w_{00}(z)$ характеристическую функцию обтекания неподвижной решетки с циркуляцией, равной нулю, вокруг каждой пластинки из формул (7) и (8) найдем:

$$w_{00}(z)=u_\infty z-iv_\infty\ln\frac{\operatorname{ch}z+\sqrt{\operatorname{ch}^2z-\operatorname{ch}^2a}}{\operatorname{ch}a}. \tag{9}$$

Область D в плоскости z с помощью соотношения (9) отображается конформно на косой ряд горизонтальных разрезов в плоскости w_{00}. Геометрические параметры косой решетки в плоскости w_{00} определяются значениями величин u_∞, v_∞ и a.

Сумма формул (6) и (8) при соответствующем значении Γ и формула (9) дают в параметрическом виде решение задачи, подобной задаче, сформулированной в § 2 для косого ряда отрезков в плоскости комплексного переменного w_{00} (В этом случае периодом служит некоторое комплексное число). Аналогичным путем можно получить решение рассматриваемой задачи для косых решеток, составленных из нескольких рядов.

§ 6. Функция скоростей $\frac{dw}{dz_1}$ для абсолютного возмущенного движения жидкости при глиссировании слабо изогнутого профиля с малыми углами атаки по поверхности невесомой жидкости конечной глубины или при движении тонкого профиля между двумя параллельными стенками дается формулой (1) в частном случае, когда: $p=1$; $q=1$; $a_1=c_1=-a$; $b_1=d_1=+a$ и $v_1=v_2=v_n(x)$ при $y=0$ и $v_1=v_2=-v_n(x)$ при $y=\frac{\pi i}{2}$, где $v_n(x)$ — нормальная составляющая скорости на профиле.

Таким образом имеем:

$$\frac{dw}{dz_1}=u-iv=-\frac{2i}{\pi}\sqrt{\frac{\operatorname{sh}2(z+a)}{\operatorname{sh}2(z-a)}}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{v_n(x)}{\operatorname{sh}2(x-z)}\sqrt{\frac{\operatorname{sh}2(a-x)}{\operatorname{sh}2(a+x)}}\,dx, \tag{10}$$

где $z_1=\frac{2}{\pi}Hz$, а H есть расстояние между стенками или удвоенная величина глубины воды при глиссировании.

Для проекций силы, действующей на тонкое крыло, движущееся между двумя параллельными стенками с постоянной скоростью U_0, имеют место формулы:

$$X=0;\ Y=\frac{2\rho}{\pi}HU_0\Gamma_0, \tag{11}$$

где $\Gamma_0=\int\limits_C\frac{dw}{dz_1}dz$, C — контур, охватывающий крыло; $\frac{2H\Gamma_0}{\pi}$ представляет собой циркуляцию вокруг крыла.

Для плоской пластинки $v_n(x)=-U_0\alpha$ (α — угол атаки) справедливо соотношение:

$$\Gamma_0=\frac{2\pi}{v_n}\Big[F^2(z)(z-a)\Big]_{z=a}=-\frac{16U_0\alpha}{\pi}\operatorname{sh}4a\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 2a\sin^2\varphi}}\right]^2. \tag{12}$$

§ 7. Из формулы (10) легко получить формулу для функции скорости при ударе плоской пластинки о воду конечной глубины. Иным методом эта задача решена М. Келдышем ([6]). Для этого достаточно положить в формуле (10) $v_n(x)=v_0$, где v_0 — скорость пластинки после удара, и добавить чисто циркуляционное течение с циркуляцией — $\frac{2H\Gamma_0}{\pi}$.

Таким образом функция скоростей возмущенного течения при ударе плоской пластинки о воду конечной глубины имеет вид:

$$\frac{dw_{00}}{dz}=-\frac{iv_0}{\pi\sqrt{\operatorname{sh}^2 2z-\operatorname{sh}^2 2a}}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{\operatorname{ch}2(z+x)-\operatorname{ch}4a\operatorname{ch}2(z-x)}{\operatorname{sh}2(x-z)\sqrt{\operatorname{sh}^2 2a-\operatorname{sh}^2 2x}}\,dx.$$

Аналогичным образом можно определить возмущенное течение при ударе о воду нескольких пластинок, а также в случае, когда угловая скорость вращения пластинок после удара отлична от нуля.

Центральный аэрогидродинамический институт имени Н. Е. Жуковского. Москва.

Поступило 16 XI 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Wagner, ZS. ang. Math. und Mech., H. 4 (1932). [2] Л. Седов, Труды Конференц. по теории волнового сопротивления (1937). [3] Л. Седов, Труды ЦАГИ, вып. 252 (1936). [4] Л. Седов, Труды ЦАГИ, вып. 325 (1937). [5] М. Келдыш и Л. Седов, ДАН, XVI, № 1 (1937). [6] М. Келдыш, Труды ЦАГИ, вып. 152 (1935).