Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 1

ГИДРОДИНАМИКА

И. А. ЧАРНЫЙ

К ТЕОРИИ ОДНОРАЗМЕРНОГО НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 16 XI 1937)

1. В настоящей заметке дается решение задачи о колебаниях давления при произвольном неустановившемся движении жидкости в трубах с учетом вязкости и сжимаемости жидкости.

Поставленная задача формулируется так: к одному концу трубопровода присоединен какой-либо агрегат, дающий возможность по известному закону изменять расход жидкости в зависимости от времени, например поршневой насос, задвижка, турбина и т. п. Агрегат отделен от трубопровода камерой, служащей для уменьшения колебаний давления (например воздушный колпак, уравнительная башня и т. п.). Другой конец трубопровода открыт и поддерживается при постоянном давлении, принимаемом за нуль.

Требуется определить колебания давления у агрегата, когда расход жидкости, создаваемый или регулируемый агрегатом, меняется по заданному закону в зависимости от времени.

2. Дифференциальные уравнения задачи выводятся следующим образом. Рассматривая силы, действующие на элемент жидкости в трубе длиной dx, получаем очевидное равенство, предполагая давление равномерно распределенным по поперечному сечению трубы:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\,dx f-\rho\cdot f\frac{dv}{dt}\,dx-\gamma f\,dx\cdot\sin\alpha-\tau\cdot\pi d\cdot dx=0, \qquad (1)$$

где p—давление, v—скорость жидкости (средняя в поперечном сечении), ρ—плотность жидкости, γ—удельный вес жидкости, d—диаметр трубы, f—площадь поперечного сечения трубы, α—угол наклона трубы к горизонту, τ—сила трения жидкости о стенки, отнесенная к единице площади, $\frac{dv}{dt}$ — ускорение жидкости.

По известной формуле гидравлики

$$\tau=\frac{\lambda}{8}\rho v^2, \qquad (2)$$

где λ—коэффициент сопротивления в формуле Д'Арси-Вейсбаха для потери напора на трение. Так как рассматриваются скорости, много меньшие звуковых, в производных по времени можно пренебречь конвективными членами.

Тогда

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\partial v}{\partial t}, \tag{3}$$

и из (1)

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\lambda v^2}{2d}\right) + \gamma \sin\alpha. \tag{1,1}$$

Чтобы иметь дело только с линейными уравнениями, положим

$$\frac{\lambda v^2}{2d} \approx \frac{\lambda v_{\text{ср.}}}{2d}\, v, \tag{4}$$

где $v_{\text{ср.}}$—средняя по времени скорость жидкости. Это допустимо при небольших колебаниях скорости. Тогда из (1, 1) получим для турбулентного и ламинарного режимов:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + 2av\right) + \gamma \sin\alpha, \tag{1, 2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} 2a &= \lambda\frac{v_{\text{ср.}}}{2d} \text{ — турбулентный режим} \\ 2a &= \frac{32\nu}{d^2} \text{ — ламинарный режим} \end{aligned}\right\}, \tag{4, 1}$$

ν—кинематический коэффициент вязкости.

Второе уравнение, связывающее p и v, получим из уравнения неразрывности, что для капельной жидкости дает:

$$\frac{dp}{dt} = -K\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{5}$$

где K—модуль объемного сжатия жидкости в трубе с упругими стенками.

Пренебрегая в (5) конвективным членом, получим:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5, 1}$$

Исключая из (1, 2) и (5, 1) p, получим, полагая в (1, 2) ρ и γ постоянными:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial v}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{6)*$$

где $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ — скорость звука в жидкости, текущей в трубопроводе.

Помещая начало координат у открытого конца, можно сформулировать следующие начальные и граничные условия:

$$\text{при } x = 0,\ p = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{7}$$

На другом конце трубопровода у агрегата:

$$\text{при } x = l,\ v + h\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{Q(t)}{f} = f(t), \tag{8}$$

где $Q(t)$—заданный расход, создаваемый или регулируемый агрегатом, отсчитываемый от стационарного расхода, бывшего к моменту времени $t = 0$. Таким образом $f(t) = 0$ для $t \leqslant 0$ и $f(t)$ задана для $t \geqslant 0$.

Уравнение (8) получается из баланса расходов жидкости сквозь ка-

---

* Следует отметить глубокую аналогию между нашей задачей и задачей электротехники—расчетом электрических линий с распределенными постоянными. Эта аналогия использована нами в другой работе.

меру. Можно показать, что для воздушного колпака при изотермическом режиме для небольших колебаний давления:

$$h = \frac{KV_0}{p_0 f}, \ldots \tag{9}$$

где V_0, p_0—средние объем и абсолютное давление воздуха в колпаке, f—площадь поперечного сечения трубы.

Для уравнительной башни:

$$h = \frac{F}{f}\frac{K}{\gamma}, \tag{9, 1}$$

где F—площадь поперечного сечения призматической уравнительной башни; значения K, γ, f—даны выше.

Давление у агрегата найдется из (1, 2):

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} - \int\limits_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial t} + 2av\right) dx, \tag{10}$$

где p_1—первоначальное стационарное давление у агрегата.

Для несжимаемой жидкости v и $\frac{\partial v}{\partial t}$ не зависят от x и (10) дает обычную формулу для давления при неустановившемся режиме несжимаемой жидкости, пригодную, как показывает опыт, только для коротких труб, да и то не всегда. В общем случае следует пользоваться (10), найдя предварительно зависимость v и $\frac{\partial v}{\partial t}$ от x интегрированием (6) при граничных и начальных условиях (7), (8).

3. Предположим, что $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда $f(t)$ можно представить интегралом Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\, e^{i\omega(t-\alpha)}\, d\alpha$$

или, так как $f(t) = 0$ для $t < 0$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{0}^{\infty} f(\alpha)\, e^{i\omega(t-\alpha)}\, d\alpha. \tag{11}$$

Обозначая

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} f(\alpha)\, e^{-i\omega\alpha}\, d\alpha = F(\omega) = \frac{\Phi(\omega)}{\lambda(\omega)} \tag{11, 1}$$

в большинстве практически интересных случаев рациональную дробь, получим:

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{12}$$

Если $F(\omega)$ имеет полюсы, лежащие на действительной оси, то их при интегрировании следует обходить по бесконечно малым полуокружностям, лежащим в нижней полуплоскости.

Частное решение (6), удовлетворяющее (7), есть

$$v = A(\omega) \cos kx\, e^{i\omega t}, \tag{13}$$

откуда

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - i2a\omega}}{c}. \tag{14}$$

Общее решение есть

$$v = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos kx\, e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{15}$$

Из (15), (12) и (8):

$$A(\omega) = \frac{F(\omega)}{\cos kl - kh \sin kl}. \tag{16}$$

Из (10), (11, 1), (14), (15) и (16) получаем после выкладок:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} - c \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\omega)}{\lambda(\omega)} \cdot \frac{i\omega + 2a}{\sqrt{\omega^2 - i2a\omega}} \cdot \frac{e^{i\omega t}\, d\omega}{\operatorname{ctg} \frac{\sqrt{\omega^2 - i2a\omega}}{c} l - \frac{\sqrt{\omega^2 - i2a\omega}}{c} h}. \tag{17}$$

Отметим, что интегралы (12) и (17) имеют одинаковый контур интегрирования.

Обозначим

$$\frac{i\omega + 2a}{\sqrt{\omega^2 - i2a\omega}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{\sqrt{\omega^2 - i2a\omega}}{c} l - \frac{\sqrt{\omega^2 - i2a\omega}}{c} h} = Z(\omega). \tag{18}$$

Задача сводится к вычислению интеграла

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\omega)}{\lambda(\omega)} Z(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{18, 1}$$

Пусть $\frac{\Phi(\omega)}{\lambda(\omega)} \to 0$ или $\omega \to \infty$ (ω считаем комплексным).

Согласно (18), при $h \neq 0$, $Z(\omega) \to 0$, когда $\omega \to \infty$, и при $h = 0$, $Z(\omega) \to \text{const}$, когда $\omega \to \infty$. Таким образом на полуокружности Γ бесконечно большого радиуса, расположенной в верхней полуплоскости и имеющей диаметром действительную ось, согласно лемме Жордана

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\Phi(\omega)}{\lambda(\omega)} \cdot Z(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = 0,$$

откуда

$$I = 2\pi i \left(\sum R_1 + \sum R_2 \right), \tag{19}$$

где

$\sum R_1$—вычеты, соответствующие корням $\lambda(\omega)$,

$\sum R_2$—вычеты, соответствующие корням $\operatorname{ctg} \varphi - \beta\varphi$,

причем

$$\left.\begin{aligned} \varphi = kl = \frac{\sqrt{\omega^2 - i2a\omega}}{c}\, l \\ \beta = \frac{h}{l} \end{aligned}\right\}. \tag{20}$$

Если все корни простые, то из теории вычетов получаем:

$$\sum R_1 = \sum_k \frac{\Phi(\omega_k)}{\lambda'(\omega_k)} \cdot Z(\omega_k)\, e^{i\omega_k t}, \tag{21}$$

где ω_k — корень уравнения $\lambda(\omega_k) = 0$,

$$\sum R_2 = \sum_s F(\omega_s) \cdot \frac{i\omega_s + 2a}{\sqrt{\omega_s^2 - i2a\omega_s}} \cdot \frac{e^{i\omega_s t}}{\frac{d}{d\omega_s} [\operatorname{ctg} \varphi_s - \beta\varphi_s]}, \tag{22}$$

где φ_s — корень уравнения $\operatorname{ctg}\varphi_s - \beta\varphi_s = 0$, а ω_s определяется из (20):

$$\left.\begin{aligned} \omega_s &= ia \pm \xi_s \\ \xi_s &= \sqrt{\varphi_s^2 \frac{c^2}{l^2} - a^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (23)$$

Произведя вычисления, получим окончательно:

$$\sum R_2 = -i\frac{c}{l} \cdot e^{-at} \cdot$$

$$\cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{F(ia+\xi_s)\,e^{i\xi_s t} + F(ia-\xi_s)\,e^{-i\xi_s t} - \frac{ia}{\xi_s}\left[F(ia+\xi_s)\,e^{i\xi_s t} - F(ia-\xi_s)\,e^{-i\xi_s t}\right]}{(\beta^2\varphi_s^2 + \beta + 1)}. \qquad (24)$$

Нетрудно видеть, что $\sum R_1$ определяет вынужденные колебания, а $\sum R_2$—собственные. Можно показать также, что, когда $\omega_k = \omega_s$, имеет место резонанс, так как амплитуда колебаний возрастает пропорционально времени. При $a \neq 0$ и действительном ω_k резонанс невозможен, так как все φ_s действительны, следовательно ω_s комплексны, откуда $\omega_k \neq \omega_s$.

Из предыдущих формул получаем вместо (17):

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{p_{\text{вын.}}}{\rho} + \frac{p_{\text{своб.}}}{\rho},$$

где

$$\frac{p_{\text{вын.}}}{\rho} = -2\pi i c \sum_k \frac{\Phi(\omega_k)}{\lambda'(\omega_k)} \cdot Z(\omega_k)\,e^{i\omega_k t}$$

вынужденные колебания,

$$\frac{p_{\text{своб.}}}{\rho} = -2\pi\frac{c^2}{l}\,e^{-at}.$$

$$\cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{F(ia+\xi_s)\,e^{i\xi_s t} + F(ia-\xi_s)\,e^{-i\xi_s t} - \frac{ia}{\xi_s}\left[F(ia+\xi_s)\,e^{i\xi_s t} - F(ia-\xi_s)\,e^{-i\xi_s t}\right]}{\beta^2\varphi_s^2 + \beta + 1}$$

собственные колебания. (25)

Формула (25) является искомой.

Рассмотрим частные случаи.

Пусть $f(t) = A = \text{const}$ для $t > 0$, $f(t) = 0$ для $t < 0$ (импульсивное изменение скорости).

Из (11, 1):

$$F(\omega) = \frac{\Phi(\omega)}{\lambda(\omega)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} Ae^{-i\omega\alpha}\,d\alpha = \frac{A}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\omega}, \qquad (26)$$

откуда

$$\Phi(\omega) = \frac{A}{2\pi i};\ \lambda(\omega) = \omega;\ \omega_k = 0.$$

Из (18):

$$Z(\omega_k) = Z(0) = 2a\frac{l}{c}, \qquad (27)$$

откуда

$$\frac{p_{\text{вын.}}}{\rho} = -2al \cdot A, \qquad (28)$$

как легко видеть, просто потеря напора на трение.

Из (26) и (23):

$$\left.\begin{aligned} F(ia+\xi_s) &= \frac{A}{2\pi i}\cdot\frac{1}{ia+\xi_s} = \frac{A}{2\pi i}\cdot\frac{l}{c\varphi_s}e^{-i\Theta} \\ F(ia-\xi_s) &= \frac{A}{2\pi i}\cdot\frac{1}{ia-\xi_s} = \frac{-A}{2\pi i}\cdot\frac{l}{c\varphi_s}e^{i\Theta} \\ \operatorname{tg}\Theta &= \frac{a}{\xi_s} \end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

Отсюда согласно (25) после выкладок:

$$\frac{p_{\text{своб.}}}{\rho} = -2Ace^{-at}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin(\xi_s t-\Theta)-\frac{a}{\xi_s}\cdot\cos(\xi_s t-\Theta)}{\varphi_s(\beta^2\varphi_s^2+\beta+1)}. \tag{30}$$

Легко видеть, что при $\beta=0$, $a=0$ (30) обращается в формулу Н. Е. Жуковского для гидравлического удара идеальной жидкости: действительно, если $a=0$, $\beta=0$ из (23): $\varphi_s=(2s-1)\frac{\pi}{2}$, $\xi_s=(2s-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{c}{l}$, $\Theta=0$ и из (30):

$$\frac{p_{\text{своб.}}}{\rho} = -Ac\cdot\frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2s-1)\pi}{2}\cdot\frac{ct}{l}}{(2s-1)}. \tag{31}$$

(31) является разложением в ряд Фурье функции

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_{\text{своб.}}}{\rho} &= -Ac \quad \text{для } 0<t<\frac{2l}{c} \\ \frac{p_{\text{своб.}}}{\rho} &= Ac \quad \text{для } \frac{2l}{c}<t<\frac{4l}{c} \end{aligned}\right\}. \tag{31, 1}$$

как и должно быть по теории Н. Е. Жуковского.

При $\beta=0$, $a\neq0$ из (30) получим:

$$\frac{p_{\text{своб.}}}{\rho} = -Ac\cdot\frac{4}{\pi}e^{-at}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin(\xi_s t-\Theta)-\frac{a}{\xi_s}\cdot\cos(\xi_s t-\Theta)}{(2s-1)}, \tag{32}$$

где согласно (23)

$$\xi_s = \sqrt{\left[\frac{(2s-1)}{2}\cdot\frac{\pi c}{l}\right]^2-a^2}. \tag{33}$$

В случае не очень длинных трубопроводов a ничтожно мало по сравнению $\frac{\pi c}{2l}$ даже для весьма вязких жидкостей, т. е. практически можно считать $\xi_s=\frac{2s-1}{2}\cdot\frac{\pi c}{l}$, $\frac{a}{\xi_s}=0$, $\Theta=0$. В этом случае (31) и (32) будут отличаться только экспонентом e^{-at}.

Повидимому этим обстоятельством объясняется тот факт, что опыты по гидравлическому удару вязкой жидкости, поставленные в Московском государственном университете в 1934—1935 гг., дают для первой ударной волны значение, совпадающее с формулой Жуковского для идеальной жидкости.

Приложение выведенных формул к расчету уравнительных камер при гидростанциях и воздушных колпаков будет дано в другой работе.

Московский нефтяной институт
им. акад. Губкина.

Поступило
29 VII 1937.