Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

С. А. ЧУНИХИН

О ГРУППАХ С ПОДГРУППАМИ ДАННОГО ВИДА

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 27 XI 1937)

1. В настоящей работе изучаются конечные группы, имеющие некоторую наперед заданную категорию подгрупп, как например группы, обладающие рядами нормальных делителей с определенными арифметическими свойствами индексов, или например такие группы, у которых все подгруппы с порядками, делящимися на данное простое число, специальные. Отсюда получаются и некоторые свойства конечных групп вообще.

2. Мы будем пользоваться формулой, дающей отображение (1) данной группы $\mathfrak{G}$ на факторгруппы $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}$, где $\mathfrak{H}$—некоторая подгруппа $\mathfrak{G}$, а $\mathfrak{K}$—коммутант $\mathfrak{H}$.

Эта формула такова: $|A| = A^{a_1} D_2 A^{a_2} D_2^{-1} \ldots D_s A^{a_s} D_s^{-1} \mathfrak{K}$.
Здесь элементы $D_2, D_3, \ldots, D_s$ определяются из разложения $\mathfrak{G}$ по $\mathfrak{H}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}A + \mathfrak{H}A^2 + \ldots + \mathfrak{H}A^{a_1-1} + \\ + \mathfrak{H}D_2 + \mathfrak{H}D_2A + \mathfrak{H}D_2A^2 + \ldots + \mathfrak{H}D_2A^{a_2-1} + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + \mathfrak{H}D_s + \mathfrak{H}D_sA + \mathfrak{H}D_sA^2 + \ldots + \mathfrak{H}D_sA^{a_s-1}. \end{aligned}$$

Наши рассуждения вполне независимы от теории групповых характеров.

3. Для краткости мы будем употреблять следующие обозначения:

1) Группы типа S—такие неспециальные группы, все действительные подгруппы которых специальные.* Строение таких групп было впервые установлено акад. О. Ю. Шмидтом (2).

2) pd-группа (или pd-подгруппа) — такая группа (или подгруппа), порядок которой делится на данное простое число p.

3) Группы типа Sp—неспециальные pd-группы, у которых все действительные pd-подгруппы специальные.

4) Группа типа A—неспециальная группа порядка qr^β $(q \neq r$, q и r—простые числа), у которой силовская подгруппа порядка r^β является инвариантной элементарной абелевой подгруппой; при этом $r^\beta \equiv 1 \pmod q$ и β наименьшее число, удовлетворяющее сравнению $r^x \equiv 1 \pmod q$.

5) Пусть $m = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k}$ $(q_1, q_2, \ldots, q_k$ — простые числа) общий наибольший делитель порядков групп $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$. Введем символ $T(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$, определяемый равенствами:

---

* Группа называется специальной, если все ее подгруппы Силова инвариантны.

если $m=1$, то $T(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)=1$,

если $m>1$, то $T(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)=\prod_{i=1}^{i=k}(q_i^{\alpha_i}-1)(q_i^{\alpha_i-1}-1)\dots(q_i-1)$.

4. Теорема I. *Группы типа Sp существуют лишь следующих двух видов:* 1) *группы типа S,* 2) *прямое произведение циклической группы порядка p и некоторой группы типа S, порядок которой не делится на p.*

Лемма: *pd-группа $\mathfrak{G}$, не принадлежащая к типу Sp, тогда и только тогда является группой специальной, если она не содержит pd-подгрупп типа Sp.*

Теорема II. *Неспециальная pd-группа содержит всегда действитеаьную pd-подгруппу типа Sp или сама этого типа.*

Следствие. *pd-группа, порядок которой делится на более чем три различных простых числа, тогда и только тогда является специальной группой, если все ее pd-подгруппы, порядки которых делятся на не более чем три различных простых числа, специальные.*

5. А. А. Кулаков и С. А. Чунихин доказали (3) следующую теорему: «Группа $\mathfrak{G}$ порядка $p^\lambda n$, p—простое число, $\lambda \geqslant 2$, p не делит n, содержит всегда подгруппу, порядок которой делится на p и одновременно на некоторое другое простое число, неравное p. Единственное исключение представляют группы типа A». Эту теорему можно с помощью вышеуказанной теоремы II обобщить следующим образом:

Теорема III. *Если порядок группы $\mathfrak{G}$ делится на простое число p, но не является степенью p, то $\mathfrak{G}$ содержит по крайней мере одну действительную подгруппу, порядок которой делится на p и одновременно на некоторое другое простое число, неравное p. Эта подгруппа или циклическая или группа типа A. Единственное исключение представляют циклические группы порядка pq (q—простое число, неравное p), а также группы типа A.*

6. Имеем следующее обобщение наших предыдущих результатов (4) о специальных группах:

Теорема IV. *Если всякому простому делению p порядка группы $\mathfrak{G}$ соответствует ряд нормальных делителей $\mathfrak{G}$:*

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{N}_0\supset\mathfrak{N}_1\supset\mathfrak{N}_2\supset\dots\supset\mathfrak{N}_e=E$$

такой, что для каждого значения i число $T(\mathfrak{N}_{i-1}/\mathfrak{N}_i, \mathfrak{K})$ взаимно просто с d_i, где d_i—общий наибольший делитель чисел p и порядка $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_i$, а $\mathfrak{K}$—коммутант $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ является специальной группой.

Среди частных случаев теоремы IV укажем на следующие три, полученные нами ранее (4), предложения:

1) Группа $\mathfrak{G}$—специальная, если порядок $\mathfrak{G}$ взаимно прост с $T(\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$.

2) Группа $\mathfrak{G}$ является специальной группой, если ее порядок взаимно прост с $T(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$.

3) Группа $\mathfrak{G}$ является специальной, если индексы ее главного ряда—простые числа, расположенные в невозрастающем порядке.

Заметим, что теорема IV обратима.

Математический институт им. В. А. Стеклова. Академия Наук СССР (Москва).

Поступило 27 XI 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Serge Tchounikhin, Math. Ann., **112**, 92 (1935); ДАН, III (VIII), № 1 (61) (1935); ДАН, III (VIII), № 5 (65) (1935). [2] О. Ю. Шмидт, Матем. сб., XXXI, вып. 3—4, 366. [3] А. А. Кулаков и Сергей Чунихин, Матем. сб., **39**, № 3. [4] Сергей Чунихин, Матем. сб., XXXVI, **2** (1929); **40**, 1 (1933).