Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

И. И. ПРИВАЛОВ

I. ПРИЛОЖЕНИЯ ПОНЯТИЯ ГАРМОНИЧЕСКОЙ МЕРЫ К НЕКОТОРЫМ ПРОБЛЕМАМ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 16 XI 1937)

В двух статьях, имеющих появиться в Математическом сборнике, мною доказаны следующие теоремы:

1. Если $w = f(z)$ есть мероморфная функция в единичном круге, отличная от константы, принимающая по всем некасательным путям определенные предельные значения (конечные или бесконечность) на множестве точек E_z окружности $|z| = 1$, $\mathrm{mes}\, E_z > 0$, то множество E_w ее предельных значений содержит замкнутое множество положительной гармонической меры.

2. Предположим, что функция $f(z)$, мероморфная в единичном круге, удовлетворяет условию (a): предельные значения функции не принимаются функцией, когда z изменяется внутри единичного круга. Тогда имеет место теорема: если функция $f(z)$, мероморфная в единичном круге $|z| < 1$, удовлетворяет условию (a), то множество значений аргумента $\varphi\, (0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, для которых существуют ее предельные значения, имеет меру 2π или нуль, смотря по тому, будет ли функция $f(z)$ ограниченного вида или нет.

3. Если $w = f(z)$ есть мероморфная функция в единичном круге, отличная от константы, принимающая по радиальным путям определенные предельные значения (конечные или бесконечность) на множестве точек E_z, расположенном на дуге σ окружности $|z| = 1$, меры большей нуля всюду на σ и второй категории, то множество E_w ее предельных значений содержит замкнутое множество положительной гармонической меры.

4. Пусть $\{\alpha\}$ есть замкнутое ограниченное множество точек пространства $p \geqslant 2$ измерений. Если $\{\alpha\}$ есть множество гармонической меры нуль, то каждая в окрестности $\{\alpha\}$ однозначная и ограниченная сверху субгармоническая функция будет необходимо субгармонической всюду в области, содержащей $\{\alpha\}$.

5. Пусть $u(P)$ есть субгармоническая функция в области G пространства $p \geqslant 2$ измерений, ограниченная сверху в этой области. Если в каждой граничной точке P^* области G, за исключением быть может замкнутого множества точек α гармонической меры нуль, выполняется неравенство: $\overline{\lim\limits_{P \to P^*}}\, u(P) \leqslant C$, то в каждой точке области G будет $u(P) \leqslant C$,

причем знак равенства возможен лишь в том случае, когда $u(P)$ тождественно равна постоянному C.

6. Пусть $u(P)$ — субгармоническая функция в области D* пространства $p \geqslant 2$ измерений, ограниченная сверху и удовлетворяющая условию: $\overline{\lim\limits_{P \to P^*}} u(P) \leqslant C$ почти всю на границе Г, верхний предел берется в предположении, что точка P стремится к граничной точке P^*, следуя нормали.

При этих условиях доказывается, что $u(P) \leqslant C$ всюду в области D, причем знак равенства возможен лишь в том случае, когда $u(P)$ тождественно равна постоянному C.

7. Будем обозначать через α множество точек границы Г области D, состоящее из конечного числа площадок** (в случае $p = 2$ граница Г состоит из конечного числа жордановых кривых, α — система конечного числа дуг этих кривых). Существует единственная функция $\omega(P, \alpha, D)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\omega(P, \alpha, D)$ в области D есть гармоническая и ограниченная функция.

2) В точках внутри α функция ω принимает значение 1, в точках же, внутренних к дополнению α, функция ω равна нулю. Эту функцию $\omega(P, \alpha, D)$ называют гармонической мерой множества α в точке P относительно области D. Пусть $u(P)$ — субгармоническая функция в области D, ограниченная сверху и удовлетворяющая условиям:

a) $\overline{\lim\limits_{P \to P^*}} u(P) \leqslant M$ во всякой точке P^* внутри α.

b) $\overline{\lim\limits_{P \to P^*}} u(P) \leqslant m$ во всякой точке P^* внутри дополнения к α.

При этих условиях имеет место неравенство:

$$u(P) \leqslant M\omega(P, \alpha, D) + m[1 - \omega(P, \alpha, D)] \tag{I}$$

всюду в области D, причем знак равенства в некоторой точке P_0 может быть только в том случае, когда $u(P)$ тождественно равна правой части (I).

8. Неравенству (I) возможно дать многочисленные приложения к теории субгармонических функций. Среди этих приложений здесь мы отметим лишь два результата.

Пусть $u(P)$ есть субгармоническая функция в области D, определяемой условиями, что $x_1 > 0$, а $x_2, x_3, \ldots, x_p$ произвольны, обладающая свойством: во всякой точке P^* на конечном расстоянии, расположенной на плоскости $x_1 = 0$, функция $u(P)$ ограничена сверху, т. е.

$$\overline{\lim_{P \to P^*}} u(P) \leqslant 0.$$

Обозначим через $M(r)$ максимум функции $u(P)$ на части сферы радиуса r, описанной из начала координат, принадлежащей области D. Тогда возможны только два случая: либо $M(r)$ так быстро стремится

---

* D — ограниченная область пространства $p \geqslant 3$ измерений, граница которой Г состоит из конечного числа поверхностей, причем каждая поверхность Г либо удовлетворяет условиям Ляпунова либо образована из конечного числа кусков поверхностей Ляпунова, пересекающихся под углами, отличными от нуля. В случае $p = 2$ под D можно понимать любую область, граница которой является спрямляемой кривой Жордана.

** Мы предполагаем, что контуры, ограничивающие площадки σ, имеют площадь, равную нулю.

к $+\infty$ при $r \to +\infty$, что $\underline{\lim} \frac{M(r)}{r} > 0$, либо в каждой точке области D будет $u(P) \leqslant 0$. Сверх того обязательно $\underline{\lim} \frac{M(r)}{r} > -\infty$.

9. В качестве второго приложения неравенства (I) отметим следующий результат: если субгармоническая и ограниченная сверху в верхнем полупространстве $x_p > 0$ функция стремится на полуплоскости $x_p = 0$, $x_1 > 0$, при $P \to \infty$ к $-\infty$, то она стремится равномерно к тому же значению в каждом угле, ограниченном полуплоскостью $x_p = 0$, $x_1 > 0$ и полуплоскостью $x_p + x_1 \operatorname{tg} \eta = 0$, где $\eta > 0$ сколь угодно мало.

Институт математики.
Московский университет.

Поступило
16 XI 1937.

II.

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ И СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 16 XI 1937)

В статье, имеющей появиться в Математическом сборнике, мной доказаны следующие теоремы:

1. Пусть $u(P) = u(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ — субгармоническая функция внутри шара $\overline{OP} = r < 1$, удовлетворяющая условию:

$$\frac{1}{\sigma} \int\limits_{\sigma} u^{+}(P)\, d\sigma = O(1), \qquad \text{(I)}$$

где интегрирование распространено по сфере σ любого радиуса $r < 1$.

Существует конечный предел

$$\lim_{P \to Q} u(P) = \overline{u}(Q),$$

когда точка P стремится по радиусу к точке Q сферы $\overline{OQ} = 1$ для всех точек Q кроме быть может множества точек сферы меры нуль. Предельные значения $\overline{u}(Q)$ образуют суммируемую функцию на сфере $\overline{OQ} = 1$.

2. Для функции $u(P)$, гармонической внутри шара $\overline{OP} = r < 1$, условие (I) необходимо и достаточно для представимости ее при помощи интеграла Пуассона-Стильтьеса.

3. Интеграл Пуассона-Лебега

$$u(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int f(Q) \frac{1 - r^2}{(1 + r^2 - 2r\cos\gamma)^{\frac{p}{2}}}\, d\omega \qquad (1)$$

имеет радиальные предельные значения почти всюду на единичной сфере, равные $f(Q)$.

Условие, необходимое и достаточное для представимости гармонической функции внутри единичного шара при помощи интеграла Пуассона-Лебега (1), будет следующим: выражение $\int\limits_{e} |u(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})|\, d\omega$, где e — любое измеримое множество единичной сферы, равномерно абсолютно непрерывно для $r < 1$.

4. Пусть $u(P)$ — гармоническая и ограниченная функция, определенная внутри области D*.

Существует $\lim\limits_{P \to Q} u(P) = \overline{u}(Q)$, когда точка P стремится по нормали к точке Q границы S для всех точек Q за исключением быть может множества точек граничной поверхности меры нуль. Значения гармонической функции $u(P)$ в точках области D выражаются при помощи формулы Грина-Лебега, образованной для граничных значений $\overline{u}(Q)$.

Институт математики.
Московский университет.

Поступило
16 XI 1937.

* D — область, граница которой удовлетворяет некоторым условиям регулярности.