Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

ЛУ-КИНГ ХУА

I.
НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В АДДИТИВНОЙ ТЕОРИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 9 XI 1937)

После того как И. М. Виноградов [1] преодолел наиболее существенную трудность в аддитивной теории простых чисел, многие из этих проблем могут быть решены без гипотезы Римана. В настоящей заметке я излагаю некоторые результаты, которые могут быть доказаны при помощи метода Виноградова с некоторыми видоизменениями.

Теорема 1. *Почти все четные числа представляются в форме* $p_1 + p_2^k$ *для нечетных* k. *Почти все четные числа* $\not\equiv 1 \pmod{p}$ для всех тех простых p, которые удовлетворяют условию $(p-1)/k$, представляются в форме $p_1 + p_2^k$ *для четных* k.

Что касается доказательства этой теоремы, то я пользуюсь леммой Виноградова для малых дуг, леммой Зигеля-Вальфиша [2] для больших дуг и использую метод Давенпорта-Гейльброна [3] для исследования особого ряда. Тем же методом получается также

Теорема 2. *Почти все целые числа* $\equiv 3 \pmod{24}$ *и* $\not\equiv 0 \pmod{5}$ *представляются в виде суммы трех квадратов простых чисел.*

В более общем виде:

Теорема 3. *Пусть* A_k — *последовательность всех тех целых чисел, которые удовлетворяют*

1) *при* k *нечетном следующим условиям:*

$$n \not\equiv 0 \pmod{2}, \quad n \not\equiv 2 \pmod{3},$$

2) *при* k *четном следующим условиям:*

$$n \equiv 3 \pmod{24}, \quad \begin{cases} n \not\equiv 0 \pmod{5}, & \text{если } 4 \nmid k, \\ n \not\equiv 0{,}2 \pmod{5}, & \text{если } 4 / k, \end{cases}$$

и

$$n \not\equiv 1 \pmod{p}, \quad \text{если } p \equiv 3 \pmod{4} \text{ и } (p-1)/k.$$

Тогда почти все целые числа последовательности A_k *представляются в виде суммы двух квадратов простых чисел и* k*-й степени простого числа.*

Непосредственное применение метода Виноградова дает также теоремы следующего типа:

Каждое достаточно большое четное число представляется суммой простого числа, двух квадратов простых чисел и k*-й степени простого числа.*

Я могу также доказать теоремы следующего типа:

Уравнение $n = p_1 - p_2 + p_3^k$ *для нечетного* k *имеет бесчисленное множество решений для каждого нечетного* n.

II.

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В АДДИТИВНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 9 XI 1937)

Соединением метода, примененного в моей последней работе [4], с одним новым результатом, принадлежащим И. М. Виноградову [4], мной может быть установлена следующая более точная и более общая.

Теорема. *Пусть*

$$a = \frac{1}{k},$$

$$b = \begin{cases} k^3 (\log k + \frac{9}{4} \log\log k), & \text{если } k \geqslant 14, \\ 2^{k-1} & \text{, если } k < 14 \end{cases}$$

и

$$m = \left[\frac{\log \frac{1}{2} b + \log (1 - 2a)}{\log k - \log (k-1)} \right].$$

Пусть $P(x)$ — многочлен k-й степени, принимающий целые значения. Существует целое K, зависящее только от $P(x)$, такое, что каждое целое число $N \equiv s \pmod K$ есть сумма s значений $P(p)$, p простое, если

$$s \geqslant 2k + 2m + 7 \; (\sim 6k \log k).$$

Для простоты я не привожу здесь в явном виде значения K.

Аналитическая часть доказательства может быть получена аналогично тому, как в предыдущей работе. Но здесь нам нужна еще следующая

Лемма:

$$\sum_{h=1}^{q^*} e^{\frac{2\pi i a}{q} P(h)} = O\left(q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon}\right),$$

где q^* есть число, связанное с q в отношении $P(h)$ [3].

Что же касается арифметической части доказательства, то я применяю одну теорему, принадлежащую Давенпорту и Човла [5], подобно тому как я поступил в проблеме Варинга.

Настоящий метод дает также большое число новых результатов в проблеме Варинга для полиномиальных слагаемых. Среди них я выбираю следующий более интересный случай для сообщения его в настоящей заметке:

Пусть $G(P(x))$ — наименьшее целое s такое, что

$$n = P(x_1) + \ldots + P(x_s), \quad x_\nu \geqslant 0$$

разрешимо для всех достаточно больших целых n.

1) $G\left(\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}\right) \leqslant 2k + 2m + 5.$

2) Если $P(x)$ многочлен четвертой степени, то $G(P(x)) \leqslant 17$.

3) Если $P(x)$ многочлен пятой степени, то $G(P(x)) \leqslant 31$, причем 31 наилучшее возможное значение.

Китай.

Поступило
15 XI 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] ДАН, XVI, № 3 (1937). [2] Math. Z. S., **40** (1936). [3] Proc. of London Math. Soc. (2), **43** (1937). [4] ДАН, XVII, № 4 (1937). [5] Landau, Additiven Zahlentheorie, Cambridge Tracts, № 35 (1937).