Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 4

МАТЕМАТИКА

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

О ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

(Представлено академиком А. Н. Крыловым 28 XII 1936)

Рассмотрим некоторую область, ограниченную контуром γ. Пусть эта область, для которой решается задача Дирихле, покрыта сеткой. На сетке намечаем замкнутую ломаную γ', идущую по линиям сетки и, как можно лучше, подходящую к контуру γ. Среди всевозможных видов сетки предпочтительнее пользоваться квадратными, ибо с помощью квадратных сеток, вообще говоря, наипростейшим образом осуществляется построение контура γ', аппроксимирующего γ.

Отметим, что если для решения уравнения

$$\Delta u = \varphi(x, y) \qquad \left(\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

пользоваться: квадратной сеткой и соотношением Рунге [1], то степень точности сеток решения равна: h^2 (h—длина стороны клеточки), треугольной сеткой и соотношением С. А. Гершгорина [2], то степень точности равна h^4, квадратной сеткой и установленным нами соотношением [3], то степень точности равна h^4.

В этой статье даются новые соотношения между значениями u в вершинах квадратной сетки и доказывается, что эти соотношения доставляют значения u с точностью порядка h^6.

Пусть u — функция от переменных x и y. Пусть u_k обозначает значение u в точке сетки (x_k, y_k). Мы имеем:

$$u_0 = \frac{4[u_1 + u_2 + u_3 + u_4] + [u_5 + u_6 + u_7 + u_8]}{20} - \\ - \frac{h^2}{100}\left[34\,\Delta u_0 - \sum_i \Delta u_i\right] - \frac{7h^4}{200}\,\Delta^2 u_0 - \frac{h^6}{600}\,\Delta^3 u_0, \tag{1}$$

$$u_0 = \frac{4[u_1 + u_2 + u_3 + u_4] + [u_5 + u_6 + u_7 + u_8]}{20} - \\ - \frac{h^2}{400}\left[116\,\Delta u_0 + \sum_k \Delta u_k\right] - \frac{h^4}{50}\,\Delta^2 u_0 - \frac{h^6}{2\,400}\,\Delta^3 u_0, \tag{2}$$

где $u_0 = u(x_0 y_0)$, u_1, u_2, u_3, u_4 обозначают значения $u(x, y)$ в точках, отстоящих на h по горизонтали и вертикали от (x_0, y_0); u_5, u_6, u_7, u_8 — значения $u(x, y)$ в вершинах квадрата с центром в точке (x_0, y_0) со стороной размера $2h$; $\sum\limits_i \Delta u_i$ и $\sum\limits_k \Delta u_k$ обозначают соответственно сумму всевозможных значений Δu в серединах сторон и в вершинах рассмотренного квадрата и наконец $\Delta^s u_0$ сокращенно обозначает значение символического выражения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(s)} u\,(x,\,y) \qquad (s=2,3)$$

в точке с координатами x_0, y_0.

Стороны квадрата предполагаются параллельными координатными осями. Остаточные члены формул (1) и (2) восьмого порядка малости относительно h.

В самом деле, вычисление показывает, что

$$4\,[u_1+u_2+u_3+u_4]+[u_5+u_6+u_7+u_8]=20\,u_0+6h^2\Delta u_0+$$
$$+\frac{h^4}{2}\,\Delta^2 u_0+\frac{h^6}{60}\left[\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^6}+5\,\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^4\partial y_0^2}+5\,\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^2\partial y_0^4}+\frac{\partial^6 u}{\partial y_0^6}\right]+O\,(h^8), \qquad (3)$$

$$h^2\sum_i \Delta u_i=4h^2\Delta u_0+h^4\Delta^2 u_0+\frac{h^6}{12}\left[\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^6}+\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^4\partial y_0^2}+\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^2\partial y_0^4}+\frac{\partial^6 u}{\partial y_0^6}\right]+O\,(h^8), \quad (4)$$

$$h^2\sum_i \Delta u_k=4h^2\Delta u_0+2h^4\Delta^2 u_0+$$
$$+\frac{h^6}{6}\left[\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^6}+7\,\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^4\partial y_0^2}+7\,\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^2\partial y_0^4}+\frac{\partial^6 u}{\partial y_0^6}\right]+O\,(h^8). \qquad (5)$$

Умножая обе части соотношения (3) на 5 и складывая полученный результат с (4), находим формулу (1).

Умножая обе части соотношения (3) на 20 и вычитая из полученного результата (5), находим формулу (2).

Чтобы найти интеграл уравнения Пуассона, принимающий в узлах сетки, расположенных на γ', заданные значения, следует решить n линейных алгебраических уравнений вида (1) или (2) с n неизвестными, где n — число внутренних узлов сетки.

Если контур γ заключить внутри замкнутой алгебраической кривой $\omega=0$, где

$$\omega=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_3,$$

возможно ближе примыкающей к γ, то вычисление, аналогичное тому, какое мы проделали в работе «Численное интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными» ([3]), показывает, что например формуле (1) соответствует оценка:

$$|\xi|\leqslant\eta+\frac{193}{151\,200}\,\frac{M_8h^6\,|\omega|_{\max}}{|a_{11}+a_{22}|},$$

где h — сторона клеточки сетки, ξ — погрешность сетки решения, η — точная верхняя граница абсолютных значений погрешности u в граничных точках сетки, M_8 — наибольшее значение абсолютных величин частных производных восьмого порядка от u в области, ограниченной γ, а $|\omega|_{\max}$ — наибольшее значение $|\omega|$ в области, ограниченной кривой $\omega=0$.

Наконец исключением из уравнений (3) и (4) или (3) и (5) $h^4\Delta^2 u_0$ получаются формулы, применение которых не требует дифференцирования функции $\varphi\,(x,\,y)$. Остаточные члены этих формул шестого порядка малости относительно h.

Математический институт Грузинского
филиала Академии Наук СССР.
Тбилиси.

Поступило
28 XII 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. Runge, ZS. f. Math. u. Phys., 56 (1908). [2] С. А. Гершгорин, Изв. Ленингр. политехн. инст., XXX (1927). [3] Ш. Е. Микеладзе, Изв. Акад. Наук СССР, № 6 (1934).