Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 4

МАТЕМАТИКА

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\varphi(x, y, z)$.

(Представлено академиком А. Н. Крыловым 16 XII 1936)

Пусть ищется функция $u(x, y, z)$, которая в области D, ограниченной замкнутой поверхностью S, удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\Delta u=\varphi(x, y, z) \qquad \left(\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

а на поверхности S условию $u=f(x, y, z)$.

Для численного решения данного уравнения строим кубическую сетку. Пусть ребра кубиков сетки параллельны координатным осям.

Образуем замкнутую поверхность S', следуя граням кубиков сетки, как можно лучше подходящей к поверхности S.

Рассмотрим кубик с центром в точке с координатами x_0, y_0, z_0. Через центр кубика проведем секущую плоскость перпендикулярно оси Oz. В сечении получим квадрат с центром в точке (x_0, y_0, z_0).

Квадрат кубика с центром в точке (x_0, y_0, z_0+h) будем называть первым квадратом, с центром в точке (x_0, y_0, z_0) — вторым и наконец с центром в точке (x_0, y_0, z_0-h) — третьим квадратом. Величина сторон названных квадратов равна $2h$.

Пусть u_k обозначает значение u в узле сетки с координатами x_k, y_k, z_k.

В этой статье даются новые формулы:

$$u_0=\frac{2\sum\limits_i u_i+\sum\limits_k u_k}{24}-\frac{h^2}{4}\Delta u_0-\frac{h^4}{48}\Delta^2 u_0, \tag{1}$$

$$u_0=\frac{8\sum\limits_i u_i+\sum\limits_r u_r}{56}-\frac{3h^2}{14}\Delta u_0-\frac{h^4}{56}\Delta^2 u_0, \tag{2}$$

$$u_0=\frac{14\sum\limits_i u_i+3\sum\limits_k u_k+\sum\limits_r u_r}{128}-\frac{h^2}{128}\left[36\Delta u_0-\sum_i \Delta u_i\right]-$$
$$-\frac{7h^4}{256}\Delta^2 u_0-\frac{h^6}{768}\Delta^3 u_0, \tag{3}$$

где $u_0 = u(x_0, y_0, z_0)$, $\sum\limits_i' n_i$ обозначает сумму всевозможных значений u в серединах сторон второго квадрата и в центрах первого и третьего квадратов, $\sum\limits_k u_k$ — сумму всевозможных значений u в серединах сторон первого и третьего квадратов и в вершинах второго квадрата, $\sum\limits_r u_r$ — сумму всевозможных значений u в вершинах первого и третьего квадратов, Δu_0 обозначает значение Δu в точке с координатами x_0, y_0, z_0, $\sum\limits_i \Delta u_i$ — сумму всевозможных значений Δu в серединах сторон второго дводрата и в центрах первого и третьего квадратов, а $\Delta^s u_0$ — значение символического выражения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{(s)} u(x, y, z) \qquad (s = 2, 3),$$

в точке с координатами x_0, y_0, z_0.

Остаточные члены первых двух формул—шестого порядка малости относительно h, а последней — восьмого порядка.

В самом деле, с помощью формулы Тейлора находим:

$$\sum_i u_i = 6u_0 + h^2\Delta u_0 + \frac{h^4}{12}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y_0^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z_0^4}\right] + O(h^6). \tag{4}$$

Проведем через точку (x_0, y_0, z_0) плоскости, параллельные координатным плоскостям. Напишем для квадратов, получившихся в сечениях, соотношения, аналогичные соотношению (13) нашей монографии: «Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными» ([1]).

Умножим обе части этих соотношений и соотношения (4) на множители α, β, γ, δ и сложим. Соответствующим подбором α, β, γ, δ получается формула (1).

Перейдем теперь к выводу формулы (2). Напишем соотношения между значениями u в вершинах первого и третьего квадратов, аналогичные соотношению (10) второй главы монографии ([1]), сохранив члены до шестого порядка малости относительно h (включительно).

После простых вычислений получается, что

$$\sum_r u_r = 8u_0 + 4h^2\Delta u_0 + \frac{h^4}{3}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y_0^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z_0^4} + \right.$$
$$\left. + 6\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^2 \partial y_0^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y_0^2 \partial z_0^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_0^2 \partial z_0^2}\right)\right] + O(h^6). \tag{5}$$

Умножая обе части (4) на 8 и складывая с (5), находим формулу (2).

Наконец выведем формулу (3). Вычисление показывает, что

$$2h^2 \sum_i \Delta u_i = 12h^2\Delta u_0 + 2h^4\Delta^2 u_0 + \frac{h^6}{6}\left[\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y_0^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial z_0^6} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^6 u}{\partial x_0^4 \partial y_0^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial y_0^4 \partial x_0^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial y_0^4 \partial z_0^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial z_0^4 \partial y_0^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x_0^4 \partial z_0^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial z_0^4 \partial x_0^2}\right] + O(h^8). \tag{6}$$

Напишем соотношения (1) и (2), сохранив члены до восьмого порядка малости относительно h (включительно). Умножим эти соотношения и соотношение (6) на множители α, β, γ и сложим. Соответствующим подбором α, β, γ получится формула (3).

Перенумеруем внутренние точки сетки в произвольном порядке от 1 до n. Число уравнений вида (1), (2), (3) будет равно числу внутренних узлов сетки. Таким образом решение данного дифференциального уравнения осуществляется фактическим решением n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.

Рассмотрим эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

охватывающий поверхность S (так, чтобы S полностью лежала внутри эллипсоида) и возможно ближе примыкающий к поверхности S. Пусть полуоси эллипсоида параллельны координатным осям.

Обобщая лемму § 4 монографии ([1]) и выполняя вычисление, находим например, что формуле (2) соответствует оценка:

$$|\xi|\leqslant\eta+\frac{7}{80}\frac{M_6h^4}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}},$$

где h — величина ребра кубика сетки, ξ — погрешность сеток решения, η — точная верхняя граница абсолютных значений погрешности u в граничных узлах сетки, а M_6 обозначает наибольшее значение абсолютных величин частных производных шестого порядка от u в области D.

Математический институт
Грузинского филиала Академии Наук СССР.
Тбилиси.

Поступило
16 XII 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш. Е. Микеладзе, Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными, Издательство Акад. Наук СССР, М.—Л. (1936).