Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. С. КОШЛЯКОВ, член-корреспондент Академии Наук СССР

О НЕКОТОРЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ В РЯДЫ FOURIER-BESSEL'я

В работе «The Use of Series of Bessel Functions in Problems Connected with Cylindrical Wind-Tunnels» (1) G. N. Watson дал формулы, преобразовывающие ряды

$$S_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(k_m r)}{J_1^2(k_m a)} e^{-k_m x}; \quad S_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(k_m r)}{k_m a J_1^2(k_m a)} e^{-k_m x}; \tag{1}$$

$$S_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(n_m r)}{J_0^2(n_m a)} e^{-n_m x}; \quad S_4 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0'(n_m r)}{n_m a J_0^2(n_m a)} e^{-n_m x} \tag{2}$$

в новые ряды, расположенные по степеням x и облегчающие вычисление сумм S_1, S_2, S_3 и S_4 при малых значениях x. В формулах (1) k_1, k_2, k_3, ... обозначают положительные корни уравнения $J_0(ka) = 0$, а n_1, n_2, n_3, ... — положительные корни уравнения $J_1(na) = 0$.

Преобразования, данные Watson'ом, являются частными случаями одной общей сумматорной формулы, установленной мною в 1920 г. в работе «О некоторых приложениях теории интегральных вычетов» (2). В настоящей заметке я укажу на новую форму этой сумматорной формулы и приведу некоторые случаи ее применения.

Пусть λ_1, λ_2, λ_3, ... обозначают положительные корни уравнения

$$J_n(\lambda) = 0; \tag{3}$$

тогда при известных условиях, налагаемых на функцию $\varphi(z)$*, имеет место сумматорная формула:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^{n-1}}{J_{n+1}(\lambda_j)} \varphi(\lambda_j) = 2^{n-1}\Gamma(n+1)\varphi(0) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\varphi(ix) - \varphi(-ix)}{2i} \frac{x^{n-1}}{I_n(x)} dx, \tag{4}$$

где

$$I_n(x) = e^{-\frac{n\pi i}{2}} J_n(ix).$$

Заменим в формуле (4) функцию $\varphi(z)$ на функцию

$$\frac{\pi}{2} z^{p-n+2} \left\{ J_n(z) Y_p(\alpha z) - Y_n(z) J_p(\alpha z) \right\} f(z),$$

* Эти условия указаны на стр. 28—30 указанной моей работы. Они здесь не приводятся, так как мы имеем в виду применить видоизмененную формулу (5) и указываем на условия, налагаемые на функцию $f(z)$.

где n и p — целые числа, причем $p \geqslant n-1$; α — вещественное число $(0<\alpha<1)$, а функция $f(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x+iy)$ голоморфна при всяком $x \geqslant 0$;

2) имеет место равенство

$$\lim_{R\to\infty}\left\{R^{p-n+\frac{5}{2}}e^{-\alpha R\,|\sin\theta|}\,|f(Re^{\theta i})|\right\}=0, \qquad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

Тогда формула (4) преобразуется в следующую:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^p\frac{J_p(\alpha\lambda_j)}{J_{n+1}^2(\lambda_j)}f(\lambda_j)=\varepsilon 2^{n-1}\,\Gamma(n+1)\,\alpha^{n-1}f(0)+$$

$$+\frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^{\infty}x^{p+1}\,\frac{(-1)^p I_p(\alpha x)\,K_n(x)-(-1)^n K_p(\alpha x)\,I_n(x)}{I_n(x)}\,\frac{f(ix)-f(-ix)}{2i}\,dx, \tag{5}$$

где $K_n(x)$ обозначает функцию Макдональда, а $\varepsilon=0$ при $p \geqslant n$ и $\varepsilon=1$ при $p=n-1$.

Полагая в формуле (5) $f(z)=z^{m+\frac{1}{2}}K_{m+\frac{1}{2}}(\beta z)$, где m — целое положительное число или нуль, получим:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{p+m+\frac{1}{2}}\frac{J_p(\alpha\lambda_j)\,K_{m+\frac{1}{2}}(\beta\lambda_j)}{J_{n+1}^2(\lambda_j)}=\frac{\varepsilon 2^{n+m-\frac{3}{2}}\,\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha^{n-1}}{\beta^{m+\frac{1}{2}}}+$$

$$+\frac{2^{p+m-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(p+m+\frac{3}{2}\right)\alpha^p\beta^{m+\frac{1}{2}}}{(\alpha^2+\beta^2)^{p+m+\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{(-1)^{p-n+1}}{2}\int_0^{\infty}\frac{K_n(x)}{I_n(x)}\,I_p(\alpha x)\,J_{m+\frac{1}{2}}(\beta x)\,x^{p+m+\frac{3}{2}}\,dx. \tag{6}$$

Если развернуть $I_p(\alpha x)\,J_{m+\frac{1}{2}}(\beta x)$ в степенной ряд, то получится следующее преобразование*:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{p+m+\frac{1}{2}}\frac{J_p(\alpha\lambda_j)\,K_{m+\frac{1}{2}}(\beta\lambda_j)}{J_{n+1}^2(\lambda_j)}=\frac{\varepsilon 2^{n+m-\frac{3}{2}}\,\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha^{n-1}}{\beta^{m+\frac{1}{2}}}+$$

$$+\frac{2^{p+m-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(p+m+\frac{3}{2}\right)\alpha^p\beta^{m+\frac{1}{2}}}{(\alpha^2+\beta^2)^{p+m+\frac{3}{2}}}+$$

$$+(-1)^{p-n+1}\frac{\pi}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^p\left(\frac{\beta}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\lambda_{2(p+k+m)}\times$$

---

* Доказательство этого преобразования для случая $m=0$ служило темой дипломной работы, выполненной под моим руководством студентом Ленинградского государственного университета Л. С. Сролем.

$$\times \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s \alpha^{2s} \beta^{2(k-s-1)}}{s!\,\Gamma(p+s+1)\,\Gamma(k-s)\,\Gamma\left(m+k-s+\frac{1}{2}\right)}, \tag{7}$$

где ради краткости положено

$$\lambda_{2r} = \frac{1}{\pi(2r+1)} \int_0^\infty \frac{x^{2r}dx}{I_n^2(x)}. \tag{8}$$

Если здесь положить

$$m=0,\quad n=0,\quad p=0;$$
$$m=0,\quad n=0,\quad p=-1;$$
$$m=0,\quad n=1,\quad p=0,$$

то формула (7) дает преобразование, указанное Watson'ом для сумм S_1, S_2 и S_3. Небольшое видоизменение первого члена, стоящего в правой части равенства (5), дает результат Watson'а для суммы S_4 (при $m=0$, $n=1$, $p=-1$).

С помощью сумматорных формул (4) и (5) может быть изучен аналитический характер функций, заданных рядами, расположенными по бесселевым функциям.

Так, например, если положить

$$f(z) = \frac{1}{z^{s+p}},\quad R(s) > \frac{1}{2}$$

и видоизменить формулу (5) так, чтобы интегрирование совершалось по прямой, параллельной мнимой оси и пересекающей вещественную ось в точке τ, где $0 < \tau < 1$, то, введя для краткости письма обозначение

$$\zeta_\alpha(s) = \sum_{j=1}^\infty \frac{J_p(\alpha\lambda_j)}{J_{n+1}^2(\lambda_j)} \frac{1}{\lambda_j^s}, \tag{9}$$

найдем соотношение:

$$\zeta_\alpha(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} \frac{\pi}{2} \frac{J_n(z)\,Y_p(\alpha z) - Y_n(z)\,J_p(\alpha z)}{J_n(z)} z^{1-s}\,dz, \tag{10}$$

дающее аналитическое представление функции $\zeta_\alpha(s)$ на всей плоскости комплексного переменного s.

Если считать, что $R(s) < -p$ при $p \geqslant n$ и $R(s) < -p-1$ при $p = n-1$, то в формуле (10) можно перейти к пределу при $\tau \to 0$, в результате чего получится соотношение:

$$\zeta_\alpha(1-p-\sigma) =$$
$$= \frac{(-1)^n}{\pi} \cos\frac{\pi\sigma}{2} \int_0^\infty x^{p+1} \frac{(-1)^p I_p(\alpha x)\,K_n(x) - (-1)^n K_p(\alpha x)\,I_n(x)}{I_n(x)} x^{\sigma-1}\,dx, \tag{11}$$

причем с помощью аналитического продолжения можно доказать, что эта формула справедлива при $R(\sigma) > 0$, если $p \geqslant n$, и при $R(\sigma) > 1$, если $p = n-1$.

Соотношение (11) показывает, что

$$\zeta_\alpha(-2k-p) = 0 \tag{12}$$

при $p \geqslant n-1$ и при $k = 1, 2, 3, \ldots$

Если $p > n$, то равенство (12) справедливо и при $k = 0$.

Если же $p = n - 1$, то $\zeta_\alpha(-p) \neq 0$, и в этом случае оказывается

$$\zeta_\alpha(-n+1) = 2^{n-1}\,\Gamma(n+1)\,\alpha^{n-1}. \tag{13}$$

Далее из формулы (11) вытекает, что

$$\zeta_\alpha[-(2k-1+p)] = (-1)^{k+1}\frac{2^{2k+p-1}\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+p+\frac{1}{2}\right)}{\pi\cdot\alpha^{2k+p+1}} +$$

$$+(-1)^{p+n+k}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\lambda_{2(p+s+k)}}{s!\,\Gamma(p+s+1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p+2s}. \tag{14}$$

Свойства функции $\zeta_\alpha(s)$ могут быть использованы для построения сумматорных формул, аналогичных формулам (4) и (5). Так например, применяя формулу обращения Римана-Меллина, найдем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{p+m+\frac{1}{2}}\frac{J_p(\alpha\lambda_j)\,K_{m+\frac{1}{2}}(\beta\lambda_j)}{J_{n+1}^2(\lambda_j)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+2m+s+1}{2}\right)}{2^{\frac{3}{2}-s-p-m}\,\beta^{p+s+m+\frac{1}{2}}}\,\zeta_\alpha(s)\,ds,$$

где $\tau > \frac{1}{2}$.

Описав из точки τ полуокружность, пересекающую вещественную ось в отрицательной ее части, и увеличив радиус этой полуокружности до бесконечности, найдем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{p+m+\frac{1}{2}}\frac{J_p(\alpha\lambda_j)\,K_{m+\frac{1}{2}}(\beta\lambda_j)}{J_{n+1}^2(\lambda_j)} = \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\beta^{m+\frac{1}{2}}}\,\zeta_\alpha(-p) +$$

$$+(-1)^{m-1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(m+k)\,\zeta_\alpha[-(2m+2k+p-1)]}{\Gamma(k)\,\Gamma(2m+2k)}\,\beta^{2k+m-\frac{3}{2}}. \tag{15}$$

Принимая во внимание формулу (14), мы снова приходим к результату (7).

Институт математики и механики
Ленинградского государственного
университета.

Поступило
29 XI 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Watson, Proc. Roy. Soc. A, **130** (1930). [2] Н. С. Кошляков, Записки Матем. кабинета Тавр. ун-та (1920).