Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 4

МАТЕМАТИКА

В. С. ИГНАТОВСКИЙ, член-корреспондент Академии Наук СССР

ПО ПОВОДУ ЛАПЛАСОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ. IV

Как продолжение нашей заметки III ([1]) мы рассмотрим теперь внешнее пространство к шару радиуса r_1. Таким образом вместо условий (12) заметки III мы будем иметь:

$$r_1 \leqslant r \leqslant \infty \text{ и } t > 0, \tag{1}$$

и вместо величин (13) теперь будут иметь для нас значения следующие:

$$q_n(r_1+0,\ t) = q_{n,1}(t);\ \frac{\partial q_n}{\partial r}_{r\to r_1} = h_{n,1}(t), \tag{2}$$

$$q_n(r,\ 0) = g_n(r);\ \frac{\partial q_n}{\partial t}_{t\to 0} = G_n(r). \tag{3}$$

Связь (15) остается в силе, и теперь необходимо лишь интегрировать уравнение (16), причем μ и ρ определяются выражением (17).

Как мы увидим далее, из приведенных выше четырех величин (2) и (3), три могут быть даны.

Помножив (16) заметки III на r^{n+1} и введя функцию:

$$r^{n+1} p_n = \pi_n(r,\ t), \tag{4}$$

мы получим для нее уравнение:

$$a\frac{\partial^2 \pi_n}{dt^2} + \rho^2\pi_n - \frac{\partial^2\pi_n}{\partial r^2} + \frac{2n}{r}\frac{\partial \pi_n}{\partial r} = r^{n+1}\zeta_n(t,\ r);\ a = \frac{1}{c^2}. \tag{5}$$

К нему мы применим трансформацию Лапласа относительно времени t:

$$\varphi_n(z,\ r) = \int_0^\infty e^{-zt}\pi_n(r,\ t)\,dt, \tag{6}$$

после чего получим из (5):

$$\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial r^2} - \frac{2n}{r}\frac{\partial \varphi_n}{\partial r} - a\left(z^2+\frac{\rho^2}{a}\right)\varphi_n = -r^{n+1}\left\{\nu_n(z,\ r) + azf_n(r) + aF_n(r)\right\}, \tag{7}$$

причем $\nu_n(z,\ r)$ означает нижнюю функцию от $\zeta_n(t,\ r)$ и

$$f_n(r) = p_n(r,\ 0);\ F_n(r) = \frac{\partial p_n}{\partial t}_{t\to 0}. \tag{8}$$

Далее мы вторично применим к (7) трансформацию Лапласа, но теперь по отношению к r, т. е. вследствие (1):

$$\chi_n(z,\ \varepsilon) = \int_{r_1}^{\infty} e^{-\varepsilon r}\varphi_n(z,\ r)\,dr. \tag{9}$$

Из (7) следует тогда:

$$\frac{d\chi_n(z,\ \varepsilon)}{d\varepsilon} + \frac{2\varepsilon(1+n)}{\varepsilon^2-k^2}\chi_n(z,\ \varepsilon) = \frac{e^{-\varepsilon r_1}}{\varepsilon^2-k^2}\left\{2n+1-\varepsilon r_1)\,\varphi_n(z, r_1) - r_1\varphi_n'(z,\ r_1)\right\} - \\ - \frac{L_n(z,\ \varepsilon)}{\varepsilon^2-k^2}, \tag{10}$$

причем

$$k^2 = az^2 + \nu^2;\ \varphi_n'(z,\ r_1) = \frac{\partial\varphi_n(z,\ r)}{\partial r}_{r\to r_1}, \tag{11}$$

$$L_n(z,\ \varepsilon) = \int_{r_1}^{\infty} e^{-\varepsilon r} M_n(z,\ r)\,dr \tag{12}$$

и

$$M_n(z,\ r) = r^{n+2}\left\{\nu_n(z,\ r) + azf_n(r) + aF_n(r)\right\}; \tag{13}$$

общий интеграл (10) будет:

$$\chi_n(z, \varepsilon) = \frac{C_n}{(\varepsilon^2-k^2)^{n+1}} + \frac{(2n+1)\,\varphi_n(z,\ r_1) - r_1\varphi_n'(z,\ r_1)}{(\varepsilon^2-k^2)^{n+1}}\int e^{-\varepsilon r_1}(\varepsilon^2-k^2)^n\,d\varepsilon - \\ - \frac{r_1\varphi_n(z,\ r_1)}{(\varepsilon^2-k^2)^{n+1}}\int e^{-\varepsilon r_1}\varepsilon\,(\varepsilon^2-k^2)^n\,d\varepsilon + \frac{1}{(\varepsilon^2-k^2)^{n+1}}\int L_n(z, \varepsilon)\,(\varepsilon^2-k^2)^n d\varepsilon. \tag{14}$$

Так как постоянная интегрирования C_n конечно не зависит от ε, то потому она не зависит и от r. Интеграл этот может быть представлен конечными рядами, но дальнейшие вычисления для любого n становятся очень сложными и потому мы пока ограничимся случаями $n=0$ и $n=1$.

Для этих случаев мы в (14) переходим обратно в верхнее пространство относительно r и получим, во-первых:

$$C_0 = C_1 = 0, \tag{15}$$

и наконец

$$\varphi_0(z,\ r) = \varphi_0(z,\ r_1)\,\mathrm{ch}\,k(r-r_1) + \varphi_0'(z,\ r_1)\frac{\mathrm{sh}\,k(r-r_1)}{k} - \\ - \int_{r_1}^{r}\frac{\mathrm{sh}\,k(r-\tau)}{k}\cdot\frac{M_0(z,\ \tau)}{\tau}\,d\tau \tag{16}$$

и

$$\varphi_1(z,\ r) = \frac{\varphi_1(z,\ r_1)}{r_1}\left\{r\,\mathrm{ch}\,k(r-r_1) - \frac{\mathrm{sh}\,k(r-r_1)}{k}\right\} + \\ + \frac{\varphi_1'(z,\ r_1)}{r_1 k}\left\{\frac{(r-r_1)\,\mathrm{ch}\,k(r-r_1)}{r_1 k} - \frac{\mathrm{sh}\,k(r-r_1)}{r_1 k^2} + r\,\mathrm{sh}\,k(r-r_1)\right\} - \\ - \int_{r_1}^{r}\frac{M_1(z,\ \tau)}{k^3\tau^3}\left\{k(r-\tau)\,\mathrm{ch}\,k(r-\tau) + (r^2\tau r - 1)\,\mathrm{sh}\,k\ (r-\tau)\right\}d\tau, \tag{17}$$

что не что иное, как соответственные интегралы уравнения (7).

Мы в (16) и (17) встречаемся со всеми четырьмя величинами $\varphi_n(z, r_1)$, $\varphi_n'(z,\ r_1)$, $f_n(r)$ и $F_n(r)$ $(n=1, 2)$ согласно (2) и (3). Для $r=r_1$ мы получим тождества, а также после дифференцирования по r и при $r=r_1$ поэтому мы не можем исключить ни одной из этих четырех величин.

Для этой цели перейдем в (5) в нижнее пространство относительно r согласно

$$\gamma_n(t,\ \varepsilon)=\int_{r_1}^{\infty} e^{-\varepsilon r}\pi_n(r,\ t)\,dr. \tag{18}$$

С другой стороны, возвращаясь в (14) обратно в верхнее пространство относительно t, мы конечно также должны получить ту же величину $\gamma_n(t,\ \varepsilon)$. Поэтому произведем этот переход для $n=0\ (C_0=0)$, откуда следует:

$$\gamma_0(t,\ \varepsilon)=-\frac{e^{-\varepsilon r_1}}{ak_1}\int_0^t \operatorname{sh}(k_1\tau)\cdot\pi_0'(r_1,\ t-\tau)d\tau-$$

$$-\frac{e^{-r_1\varepsilon}}{ak_1^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \operatorname{ch}(k_1\tau)\cdot\pi_0(r_1,\ t-\tau)\,d\tau+\frac{\varepsilon e^{-r_1\varepsilon}}{ak_1^2}\pi_0(r_1,\ t)+$$

$$+\frac{1}{ak_1}\int_0^t \operatorname{sh}(k_1\tau)\left\{\int_{r_1}^{\infty} e^{-\varepsilon r}r\zeta_0(t-\tau,\ r)dr\right\}d\tau+\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\operatorname{sh}(k,\ t)}{k_1}\int_{r_1}^{\infty} xe^{-\varepsilon x}f_0(x)dx\right\}+$$

$$+\frac{\operatorname{sh}(k_1t)}{k_1}\int_{r_1}^{\infty} xe^{-\varepsilon x}F_0(x)\,dx, \tag{19}$$

причем

$$k_1=c\sqrt{\varepsilon^2-\nu^2};\quad \pi_0'(r_1,\ t)=\frac{\partial\pi(r,\ t)}{\partial r}\bigg|_{r\to r_1}. \tag{20}$$

Мы перейдем теперь в (19) в верхнее пространство относительно r, после чего делаем $r=r_1$. Мы получим таким образом $\pi_0(r_1,\ t)$; отсюда следует, во-первых, при $t=0$:

$$\pi_0(r_1,\ 0)-r_1f_0(r_1)=0;\ \text{или}\ q_{0,1}(0)-g_0(r_1)=0, \tag{21}$$

а потом, после перехода в нижнее пространство относительно (t),

$$\varphi_0(z,\ r_1)=-\frac{\varphi_0'(z,\ r_1)}{k}+2\left\{\beta_1(z)+\beta_2(z)+\beta_3(z)\right\}, \tag{22}$$

причем выражения $\beta_n(z)\ (n=1,\ 2,\ 3)$ зависят от $\zeta_0(r,\ t)$, $f_0(r)$ и $F_0(r)$ и исчезают вместе с последними.

Из (22) и (16) мы наконец можем исключить например $\varphi_0(z,\ r_1)$ и получим

$$\varphi_0(z,\ r)=\varphi_0(z,\ r_1)\,e^{-\kappa(r-r_1)}+2\operatorname{sh}k\,(r-r_1)\cdot\left\{\beta_1(z)+\beta_2(z)+\beta_3(z)\right\}-$$

$$-\int_{r_1}^{r}\frac{\operatorname{sh}k\,(r-\tau)}{k}\cdot\frac{M_0(z,\ \tau)}{\tau}\,d\tau. \tag{23}$$

Здесь мы должны перейти в верхнее пространство относительно t, чтобы получить искомое значение для $\pi_0\,(r,\ t)$, которое будет теперь зависеть от $\pi_0(r_1,\ t)$, $f_0(r)$ и $F_0(r)$, т. е. таким образом от трех величин (2) и (3), как вначале и сказано. Переходя наконец от π_0 к q_0, мы получим, введя обозначения:

$$M(x,\ y)=I_0(\nu\sqrt{x^2-c^2y^2});\quad r-r_1=x, \tag{24}$$

окончательно:

$$rq_0(r,\ t)=\frac{e^{-\mu t}}{2}\left\{(x+ct+r_1)\,g_0(x+ct+r_1)-(ct-x+r_1)g_0(ct-x+r_1)\right\}+$$
$$+r_1e^{-\frac{x\mu}{c}}q_{0,1}\left(t-\frac{x}{c}\right)-cr_1\int\limits_{\frac{x}{c}}^{t}e^{-y\mu}q_{0,1}(t-y)\frac{\partial M(x,\ y)}{\partial x}dy+$$
$$+\frac{e^{-\mu t}}{2c}\int\limits_{-ct}^{x}(x-y+r_1)\Big[\left\{G_0(x-y+r_1)+\mu g_0(x-y+r_1)\right\}M(y,\ t)+$$
$$+g_0(x-y+r_1)\frac{\partial M(y,\ t)}{\partial t}\Big]dy-\frac{e^{-\mu t}}{2c}\int\limits_{x}^{ct}(y-x+r_1)\Big[\left\{G_0(y-x+r_1)+\right.$$
$$\left.+\mu g_0(y-x+r_1)\right\}M(y,\ t)+g_0(y-x+r_1)\frac{\partial M(y,\ t)}{\partial t}\Big]dy+$$
$$+\frac{c}{2}\int\limits_{c}^{\frac{x}{c}}e^{-\mu y}dy\int\limits_{-cy}^{cy}S(y,\ \tau)\,d\tau+\frac{c}{2}\int\limits_{\frac{x}{c}}^{t}e^{-\mu y}dy\int\limits_{-cy}^{x}S(y,\ \tau)\,d\tau+$$
$$\frac{c}{2}\int\limits_{\frac{x}{c}}^{t}e^{-\mu y}dy\int\limits_{cy}^{x}S(y,\ \tau)\,d\tau;\ \underline{ct>x,} \tag{25}$$

причем

$$S(y,\ \tau)=(x-\tau+r_1)\,\eta_0(t-y,\ x-\tau+r_1)\,M(\tau,\ y) \tag{26}$$

и

$$rq_0(r,t)=\frac{e^{-\mu t}}{2}\left\{(x-ct+r_1)\,g_0(x-ct+r_1)+(x+ct+r_1)g_0(x+ct+r_1)\right\}+$$
$$+\frac{e^{-\mu t}}{2c}\int\limits_{-ct}^{ct}(x-y+r_1)\Big[\left\{G_0(x-y+r_1)+\mu g_0(x-y+r_1)\right\}M(y,t)+$$
$$+g_0(x-y+r_1)\frac{\partial M(y,\ t)}{\partial t}\Big]dy+\frac{c}{2}\int\limits_{0}^{t}e^{-\mu y}dy\int\limits_{-cy}^{cy}S(y,\tau)\,d\tau;\ \underline{x>tc.} \tag{27}$$

Непрерывный переход от (25) к (27) при $ct=x$ следует на основании (21).

Переходя теперь к случаю $n=1$ и полагая для простоты

$$g_1(r)=G_1(r)=\zeta_1(t,\ \varepsilon)=0,$$

т. е. дано лишь $q_{1,1}(t)$, получим:

$$r^2q_1(r,t)=rr_1e^{-\frac{x\mu}{c}}q_{1,1}\left(t-\frac{x}{c}\right)-crr_1\int\limits_{\frac{x}{c}}^{t}e^{-y\mu}q_{1,1}(t-y)\frac{\partial M(x,y)\,dy}{dx}-$$
$$-\frac{c^3x}{b}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}-\frac{c^3x}{r_1b}\frac{\partial Q}{\partial x};\ \underline{ct>x,} \tag{28}$$

и равно нулю при $ct < x$. При этом будет

$$Q = \int_{\frac{x}{c}}^{t} q_{1,1}(t-y)\, e^{-y\mu}\, dy \int_{\frac{x}{c}}^{y} M(x,\tau)\, \mathrm{sh}\, b\,(y-\tau)\, d\tau \tag{29}$$

и

$$b = \frac{c}{r_1}\sqrt{1-\rho^2 r_1^2}. \tag{30}$$

Делая в (25) и (27) $g_0 = G_0 = \eta_0 = 0$; $\mu = 0$ и полагая $q_{0,1} = \mathrm{const} = C$, получим:

$$q_0(r,\ t) = \begin{cases} \dfrac{Cr_1}{r};\ ct > x \\ 0;\ ct < x \end{cases} \tag{31}$$

и это удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ $(ct \neq x)$. Мы имеем таким образом переход к статическому случаю.

Так же и в заметке I ([2]) мы исключали одну из имеющихся там величин (2) и (3). Разница с настоящей работой заключается в том, что здесь мы это исключение произвели в нижнем пространстве, что значительно удобнее, чем в верхнем, как это сделано в заметке I.

Исследовательский институт математики
и механики Государственного университета.
Ленинград.

Поступило
28 XII 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Игнатовский, ДАН, IV, № 3, 107—110 (1936). [2] В. С. Игнатовский, ДАН, II, № 1, 5—11 (1935).