Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 4

МАТЕМАТИКА

М. К. КУРЕНСКИЙ

СПОСОБ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ В ЯКОБИАНАХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПРИ НЕСКОЛЬКИХ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЯХ

(Представлено академиком А. Н. Крыловым 14 XII 1936)

1. Если имеем:

$$u_1(x, y, z, z') = C_1;\; u_2(x, y, z, z') = C_2,$$

где z и z' — функции от x и y, то исключение произвольной функции φ из

$$u_1(x, y, z, z') = \varphi[u_2(x, y, z, z')] \tag{1}$$

приводит к линейному в якобианах уравнению с частными производными вида:

$$Ap + Bq + C + A'p' + B'q' + D(pq' - qp') = 0, \tag{2}$$

между коэффициентами которого будет существовать зависимость

$$AB' - BA' = CD,$$

называемая условием Гамбургера. Общий интеграл (1) уравнения (2) называется интегралом Гамбургера; частным случаем его является общий интеграл классической теории интегрирования линейных уравнений с одной неизвестной функцией z. По формуле

$$u_1 + \alpha u_2 + \beta = \gamma\varphi(u_2 + \delta u_1 + \varepsilon),$$

где $\alpha, \ldots, \varepsilon$ — функции от $x, \ldots, z'$, получим новое линейное в якобианах уравнение, удовлетворяющее упомянутому условию для новых коэффициентов; для

$$\gamma = 1,\; \alpha = \beta = \delta = \varepsilon = 0$$

получим общий интеграл первого уравнения.

К аналогичным заключениям приходим относительно интегралов линейных в якобианах уравнений, если аргументов и функций больше двух:

$$u_1(x_1, x_2, x_3, z, z') = \varphi[u_2(x_1, \ldots, z');\; u_3(x_1, \ldots, z')]$$
$$u_1(x, y, z, z', z'') = \varphi[u_2(x, \ldots, z'')];\; \ldots$$

2. Воспользуемся обозначениями:

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x, y)} = (xy); \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x, z)} = (xz); \ldots ; \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(z, z')} = (zz').$$

Тогда дифференцирование равенств $u_1 = C_1$, $u_2 = C_2$ дает

$$(zz')p + (xz') = 0; \quad (zz')q + (yz') = 0; \ \ldots ; \ (zz')(pq' - qp') - (xy) = 0,$$

и мы имеем вместо (2):

$$(xz')A + (yz')B - (zz')C + (zx)A' + (zy)B' - (xy)D = 0. \qquad (3)$$

С другой стороны, исключение dz' из полных дифференциалов:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}dx + \frac{\partial u_i}{\partial y}dy + \frac{\partial u_i}{\partial z}dz + \frac{\partial u_i}{\partial z'}dz' = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

дает:

$$(xz')dx + (yz')dy + (zz')dz = 0. \qquad (4)$$

Следовательно если найдем такую функцию $u_1(x, y, z, z')$, чтобы было $\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{-C}$, то для всякой функции $u_2(x, y, z, z')$ равенство (4) будет равносильно такому:

$$(xz')A + (yz')B - (zz')C = 0,$$

и следовательно подлежащее решению уравнение (3) обратится в такое:

$$(zx)A' + (zy)B' - (xy)D = 0,$$

т. е., определив функцию u_1 как частный интеграл линейного уравнения первого порядка с одной неизвестной функцией:

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} - C\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad (5)$$

мы будем иметь u_2 как частный интеграл линейного уравнения с одной функцией:

$$(A'u_{13} + Du_{12})\frac{\partial u}{\partial x} + (B'u_{13} - Du_{11})\frac{\partial u}{\partial y} - (A'u_{11} + B'u_{12})\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad (6)$$

где

$$u_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \ u_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial y}, \ u_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial z}.$$

В уравнениях (5) и (6) переменная z' будет параметрической.

Можно было бы также найти u_1' из уравнения аналогичного (5'), где A, B заменятся на A', B' и z заменится на z' в производной при C'; тогда соответственно перепишется (6). Функции u_1, u_2, как и u_1', u_2', нужны для построения общего интеграла.

3. Для уравнения при двух функциях z, z' трех аргументов x_1, x_2, x_3:

$$A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3 + C + A_1'p_1' + A_2'p_2' + A_3'p_3' +$$
$$+ D_1(p_2p_3' - p_3p_2') + D_2(p_3p_1' - p_1p_3') + D_3(p_1p_2' - p_2p_1') = 0 \qquad (7)$$

уравнение (5) напишется:

$$A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} - C \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{8}$$

а вместо (6), обозначая $u_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, u_{14} = \frac{\partial u_1}{\partial z}$, будем иметь:

$$(A_1' u_{14} - D_2 u_{13} + D_3 u_{12}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + (A_2' u_{14} - D_3 u_{11} + D_1 u_{13}) \frac{\partial u}{\partial x_2} +$$
$$+ (A_3' u_{14} - D_1 u_{12} + D_2 u_{11}) \frac{\partial u}{\partial x_3} - (A_1' u_{11} + A_2' u_{12} + A_3' u_{13}) \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

Аналогично напишутся вспомогательные линейные уравнения и при двух неизвестных функциях скольких угодно аргументов $x_1, \ldots, x_m$.

Для трех неизвестных функций z, z', z'', например, от двух аргументов x, y, рассматривая

$$u_1(x, y, z, z', z'') = C_1; \quad u_2(x, y, z, z', z'') = C_2; \quad u_3(x, y, z, z', z'') = C_3$$

и вводя якобианы третьего порядка, уравнение:

$$Ap + Bq + C + A'p' + B'q' + A''p'' + B''q'' +$$
$$+ D_1(p'q'' - p''q') + D_2(p''q - pq'') + D_3(pq' - p'q) = 0$$

перепишем:

$$(xz'z'')A + (yz'z'')B + (zxz'')A' + (zyz')B' + (zz'x)A'' +$$
$$+ (zz'y)B'' - (zz'z'')C - (zxy)D_1 - (yz'x)D_2 - (xyz'')D_3 = 0.$$

Три полных дифференциала $du_1 = 0$, $du_2 = 0$, $du_3 = 0$ приводят к определению частного интеграла u_1 уравнения вида (5) с параметрическими z', z'' и к определению частного интеграла v_1 линейного в якобианах уравнения с двумя неизвестными функциями u_2, u_3 от аргументов x, y, z, z', z''. Аналогично интегрируются уравнения с тремя функциями от 3, ..., m аргументов и т. д.

4. Для интегрирования системы линейных в якобианах уравнений известны два способа: способ Гамбургера [1] с моими изменениями для однородных уравнений, когда он неприменим [2], и мой способ [3]. Этот последний изложен для уравнений, линейных относительно производных. Он остается в силе и для уравнений, линейных в якобианах: коэффициенты вспомогательных алгебраических и дифференциальных уравнений заменяются лишь легко получаемыми новыми. Оба способа требуют интегрирования систем вспомогательных линейных уравнений одной функции, чего нет в излагаемом способе, где всякий раз интегрируется одно линейное уравнение одной функции. В новом способе можно интегрировать в отдельности каждое из n уравнений с n функциями $z_1, \ldots, z_n$. Наконец здесь нет необходимости решать алгебраические уравнения n-й степени при n функциях, как в первых двух способах.

Частные случаи: 1) когда коэффициенты D равны нулю, получаем способ интегрирования уравнений, линейных относительно производных; 2) когда

$$D = D_1 = D_2 = \ldots = A' = B' = A_1' = A_2' = \ldots = B_1' = B_2' = \ldots = 0,$$

получаем общеизвестный в классической теории способ интегрирования линейных уравнений первого порядка одной неизвестной функции z.

5. Пример 1. Для системы

$$xq - q' = 0; \quad (xy + 1)p - yp' + yz = 0$$

способ Гамбургера неприменим. Мой первый способ дал общий интеграл

$$z = y\varphi(x) + \psi(y); \quad z' = (xy+1)\varphi(x) + x\psi(y).$$

Здесь уравнение (5) дает $u_1 = z' - xz$, а из (6) получаем $u_2 = x$ и приходим к $z' - xz = \varphi(x)$. Другое уравнение приводит к интегралам $u_3 = (xy+1)z - yz'$; $u_4 = y$ и дает другую зависимость

$$(xy+1)z - yz' = \psi(y).$$

Пример 2. — $x_1x_2p_2 + x_1x_3p_3 + x_2zp_2' - x_3zp_3' + x_1x_2(p_1p_2' - p_2p_1') + x_1x_3(p_3p_1' - p_1p_3') = 0$.

Уравнение (8) дает $u_1 = x_1 + z'$, а (9) дает $u_2 = x_2x_3$. Уравнение (8) дает еще $u_2 = x_2x_3$; $u_3 = x_1z$; оба частных интеграла удовлетворяют (9). Общий интеграл есть:

$$x_1z = \varphi(x_1 + z';\ x_2x_3).$$

Научно-исследовательский институт
математики и механики
Ленинградского университета.

Поступило
14 XII 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Hamburger, Crelle Journ., 100 (1887). [2] M. Kourensky, Rendiconti C. M. Palermo, 56 (1932). [3] K. Kourensky, Bulletin de l'Académie de Belgique, (sous presse).