Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 4

МАТЕМАТИКА

Б. ГНЕДЕНКО

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ СИСТЕМЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ИНВАРИАНТНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 13 XII 1936)

В 1929 г. Б. Гагаев (1) решил следующую задачу, поставленную Н. Н. Лузиным (2): «Дифференцирование и интегрирование тригонометрической системы функций:

$$\{\cos 2\pi nx, \quad \sin 2\pi nx, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \quad 0\leqslant x\leqslant 1\} \tag{1}$$

приводит (до факторов) опять к этой же системе функций». Интересно было бы знать, существует ли другая ортогональная система функций с этим свойством. Гагаев полагает, что этим свойством обладает только система (1). Я хочу показать здесь, что он пропустил еще одну систему непрерывных функций, именно:

$$\left\{\cos 2\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)x, \quad \cos 2\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)x, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \quad 0\leqslant x\leqslant 1\right\}. \tag{2}$$

Точнее, все системы ортогональных функций, дающие решение задачи Лузина для интервала $0\leqslant x\leqslant 1$, могут быть записаны в виде:

$$\{A_k\cos(2\pi n_k x+\psi_k), \quad B_k\sin(2\pi n_k x+\psi_k)\} \tag{3}$$

и

$$\left\{A_k\cos\left[2\pi\left(n_k-\frac{1}{2}\right)x+\psi_k\right], \quad B_k\sin\left[2\pi\left(n_k-\frac{1}{2}\right)x+\psi_k\right]\right\}, \tag{4}$$

где $\{n_k\}$ — произвольная последовательность различных положительных целых чисел, A_k, B_k и ψ_k — произвольные постоянные. Если же дополнительно требовать полноту системы, то следует вместо произвольной последовательности $\{n_k\}$ взять последовательность всех натуральных чисел [система (2) полная!]. Действительно, Гагаев доказал, что общая форма систем ортогональных функций, инвариантных относительно дифференцирования, имеет вид:

$$\{\varphi_n(x)=\rho_n\cos(\lambda_n x+\psi_n)\},$$

где ρ_n, λ_n и ψ_n — постоянные.

Согласно условиям задачи функция:

$$\varphi_n'(x)=-\lambda_n\rho_n\sin(\lambda_n x+\psi_n),$$

также входит в систему. В силу равенства

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\,\varphi_n'(x)\,dx = \rho_n^2[\cos^2(\lambda_n + \psi_n) - \cos^2\psi_n] = 0$$

мы заключаем, что для λ_n существуют две возможности

$$\lambda_n = \pi k \text{ и } \lambda_n = \pi k - 2\psi_n \quad (k \text{ — целое}).$$

Ясно, что $\lambda_n \neq \lambda_m$, если $\varphi_m(x)$ отлично от $\varphi_n(x)$ и $\varphi_n'(x)$. Рассмотрим теперь все возможности, которые могут представиться в отношении λ.

1-й случай. $\lambda_n = \pi k$ и $\lambda_m = \pi r$, k и r — целые.

Так как линейные комбинации $\varphi_n(x)$ и $\varphi_n'(x)$, с одной стороны, и $\varphi_m(x)$ и $\varphi_m'(x)$, с другой, — ортогональны, то мы получаем (можно без ограничения общности считать, что $r > k$):

$$\int_0^1 \cos k\pi x \cdot \sin \pi r x\,dx = -\frac{1}{r+k}[1 - \cos(k+r)\pi] - \\ - \frac{1}{r-k}[1 - \cos(k-r)\pi] = 0.$$

Но это соотношение возможно только в том случае, когда r и k одновременно четные или одновременно нечетные.

2-й случай. $\lambda_n = \pi k - 2\psi_n$, $\lambda_m = \pi r$.

Можно предположить, что $2\psi_n$ не равно ни $\pi(k+r)$, ни $\pi(k-r)$, так как иначе были бы выполнены условия предыдущего случая. Кроме того без ограничения общности можно считать, что $\pi(k+r) - 2\psi_n$ и $\pi(k-r) - 2\psi_n$ имеют одинаковые знаки. Как и в предыдущем случае строим ортогональные функции $\cos(\pi k - 2\psi_n)x$ и $\sin \pi r x$. Равенство:

$$\int_0^1 \cos(\pi k - 2\psi_n)x \cdot \sin \pi r x\,dx = \frac{\{1 - \cos[\pi(k+r) - 2\psi_n]\}}{\pi(k+r) - 2\psi_n} + \\ + \frac{\{1 - \cos[\pi(k-r) - 2\psi_n]\}}{\pi(k-r) - 2\psi_n} = 0$$

позволяет заключить, что

$$\pi(k+r) - 2\psi_n = 2M\pi$$

и

$$\pi(k-r) - 2\psi_n = 2N\pi,$$

где M и N — целые. Следовательно, как и в первом случае, в действительности $\lambda_n = p\pi$ и $\lambda_m = q\pi$, где p и q — целые.

3-й случай. $\lambda_n = \pi k - 2\psi_n$, $\lambda_m = \pi r - 2\psi_m$.

Мы можем предположить, что величины $n(k+r) - 2\psi_n - 2\psi_m$ и $\pi(k-r) - 2\psi_n + 2\psi_m$ имеют одинаковые знаки, так как иначе одинаковые знаки имели бы величины $n(k+r) - 2\psi_n - 2\psi_m$ и $\pi(r-k) - 2\psi_m + 2\psi_n$.

Равенство $\pi(k+r) - 2\psi_n - 2\psi_m = 0$ так же, как и равенство $\pi(k-r) - 2\psi_n + 2\psi_m = 0$, невозможно, так как оно эквивалентно линейной зависимости функций $\varphi_n(x)$, $\varphi_n'(x)$, $\varphi_m(x)$, $\varphi_m'(x)$. Как и в предыдущем случае, строим две новые ортогональные функции $\cos(\pi k - 2\psi_n)x$ и $\sin(\pi r - 2\psi_n)x$.

Из равенства

$$\int_0^1 \cos(\pi k - 2\phi_n)\,x \cdot \sin(\pi r - 2\phi_m)\,x\,dx =$$

$$= \frac{\{1 - \cos[\pi(k+r) - 2\phi_n - 2\phi_m]\}}{\pi(k+r) - 2\phi_n - 2\phi_m} + \frac{\{1 - \cos[\pi(k-r) - 2\phi_n - 2\phi_m]\}}{\pi(k-r) - 2\phi_n - 2\phi_m} = 0$$

мы заключаем, что должны быть выполнены следующие соотношения:

$$\pi(k+r) - 2\phi_n - 2\phi_m = 2M\pi,$$
$$\pi(k-r) - 2\phi_n + 2\phi_m = 2N\pi,$$

где M и N — целые. Эти уравнения нам дают, что $2\phi_n = s\pi$ и $2\phi_m = t\pi$, где s и t — целые.

Таким образом доказано, что для λ_n имеются только две возможности: 1) все λ_n имеют форму $2\pi k$ или 2) все λ_n имеют форму $2\pi\left(k - \frac{1}{2}\right)$, k — целые.

Метод Гагаева позволяет решить задачи, аналогичные задаче Лузина:

1. Найти все системы ортогональных функций, для которых производная от функции системы входит в ту же систему.
2. Найти все системы ортогональных функций, которые содержатся в системе производных от функций рассматриваемой системы.

Все решения этих задач также даются системами (3) и (4).

Математический институт
Московского государственного
университета.

Поступило
13 XII 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Gagaeff, C. R., **188**, 222—224 (1929). [2] Н. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд, Москва (1915), и Математич. сборник, **30**, 5 (1916).