Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 4

МАТЕМАТИКА

А. АЛЕКСАНДРОВ

НОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СМЕШАННЫХ ОБЪЕМОВ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 10 XI 1936)

Пусть в n-мерном пространстве дано N направлений $\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_N$ таких, что плоскости $P_1, \ldots, P_N$, перпендикулярные к ним, могут ограничить выпуклый многогранник Π. Плоскость P_i назовем существенно ограничивающей, если она дает на Π грань ненулевого $(n-1)$-мерного объема. Два многоугольника с одной и той же системой нормалей $\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_N$ будем называть аналогичными, если прямая P_i, существенно ограничивающая для одного, будет такой же и для другого. Два многогранника называются аналогичными, если они имеют одну и ту же систему нормалей, все их грани будут ненулевого $(n-1)$-мерного объема и соответственные грани их аналогичны. Расстояния H_i от начала O до ограничивающих плоскостей P_i назовем опорными числами многогранника. Если принять за начало в P_i проекцию на нее начала O, то расстояние от него до пересечения P_i с P_k будет (ϑ_{ik} — угол между $\bar{n}_i$ и $\bar{n}_k$):

$$H_{ik} = \frac{H_k - H_i \cos\Theta_{ik}}{\sin\Theta_{ik}}. \tag{1}$$

Это будут опорные числа i-й грани.

Смешению аналогичных многогранников соответствует сложение их опорных чисел. Для многоугольников это утверждение очевидно. Из (1) ясно, что при сложении опорных чисел многогранников складываются и опорные числа их граней. Известно кроме того, что грань смешанного многогранника есть результат смешения параллельных граней. Поэтому если наше утверждение верно для $(n-1)$-мерных многогранников, то оно верно и для n-мерных.

Пусть V будет объем многогранника, получающегося при смешении аналогичных многогранников $H^{(1)}, \ldots, H^{(n)}$, и F_i — объемы его граней. Тогда, обозначая через $V(H^{(j_1)} \ldots H^{(j_n)})$ смешанные объемы, получим:

$$V = \sum_{j_1 \ldots j_n} \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_n} V(H^{(j_1)} \ldots H^{(j_n)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k H_i^{(k)}\Big) F_i, \tag{2}$$

или, замечая, что в свою очередь:

$$F_i = \sum_{j_1 \dots j_{n-1}} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_{n-1}} F_i (H^{(j_1)} \dots H^{(j_{n-1})}), \tag{3}$$

$$V = \sum_{j_1 \dots j_n} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_n} \sum_{i=1}^{N} H_i^{(j_n)} F_i (H^{(j_1)} \dots H^{(j_{n-1})}). \tag{4}$$

Покажем, что независимо от порядка индексов $j_1 \dots j_n$:

$$V (H^{(j_1)} \dots H^{(j_n)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} H_i^{(j_n)} F_i (H^{(j_1)} \dots H^{(j_{n-1})}). \tag{5}$$

Пусть это верно для $(n-1)$-мерного пространства. Тогда

$$F_i (H^{(j_1)} \dots H^{(j_{n-1})}) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{N} H_{ik}^{(j_{n-1})} F_{ik} (H^{(j_1)} \dots H^{(j_{n-2})}), \tag{6}$$

$$F_i (H^{(j_1)} \dots H^{(j_n)}) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{N} H_{ik}^{(j_n)} F_{ik} (H^{(j_1)} \dots H^{(j_{n-2})}). \tag{7}$$

Подставляя сюда значения H_{ik} из (1), умножая (6) на $H_i^{(j_n)}$, а (7) на $H_i^{(j_{n-1})}$, и суммируя по i, получим

$$\sum_{i=1}^{N} H_i^{(j_n)} F_i (H^{(j_1)} \dots H^{(j_{n-1})}) = \sum_{i=1}^{N} H_i^{(j_{n-1})} F_i (H^{(j_1)} \dots H^{(j_n)}). \tag{8}$$

Отсюда в связи с формулой (4) следует формула (5). Можно без труда показать, что доказательство неравенства:

$$V (H^{(1)} \dots H^{(n-1)} H^{(n)})^2 \geqslant V (H^{(1)} \dots H^{(n-1)} H^{(n-1)}) V (H^{(1)} \dots H^{(n)} H^{(n)}) \tag{9}$$

равносильно (в случае аналогичных многогранников) доказательству того, что при условии:

$$V (H^{(1)} \dots H^{(n-1)} Z) = 0 \tag{10}$$

квадратичная форма переменных Z_i:

$$V (H^{(1)} \dots H^{(n-2)} Z Z) \leqslant 0, \tag{11}$$

где знак равенства стоит только при линейной опорной функции Z.

Приведение формы (10) к каноническому виду при условии:

$$\sum_{i=1}^{N} Z_i^2 \frac{F_i (H^{(1)} \dots H^{(n-1)})}{H_i^{(n-1)}} = 1 \tag{12}$$

сводится к решению уравнений

$$F_i (H^{(1)} \dots H^{(n-2)} Z) = \lambda \frac{F_i (H^{(1)} \dots H^{(n-1)})}{H_i^{(n-1)}} Z_i . \tag{13}$$

Решение при $\lambda = 1$, $Z = H^{(n-1)}$ не играет роли в силу условия (10). При $\lambda = 0$, полагая $Z = H - H^{(n-2)}$, где H — аналогичный многогранник, получим

$$F_i (H^{(1)} \dots H^{(n-2)} H) = F_i (H^{(1)} \dots H^{(n-2)} H^{(n-2)}). \tag{14}$$

Наша теорема в случае многоугольников сводится к теореме Брунна-Минковского. Считая теорему верной для $(n-1)$-мерных многогранников, получим:

$$F_i(H^{(1)} \dots H^{(n-2)} H) \geqslant F_i(H^{(1)} \dots HH) \tag{15}$$

или

$$F_i(H^{(1)} \dots H^{(n-3)} ZZ) \leqslant 0. \tag{16}$$

Из (8) получаем, что

$$\sum_{i=1}^{N} H_i^{(n-2)} F_i(H^{(1)} \dots ZZ) = \sum_{i=1}^{N} Z_i F_i(H^{(1)} \dots H^{(n-2)} Z) = 0 \tag{17}$$

в силу (13) при $\lambda = 0$; и так как $H_i^{(n-2)} > 0$, то по (16)

$$F_i(H^{(1)} \dots H^{(n-3)} ZZ) = 0. \tag{18}$$

Следовательно Z — линейная опорная функция, так что знак равенства в (11) возможен при условии (10) только для такого Z.

При $H^{(1)} = \dots = H^{(n-2)}$ неравенство (9) представляет известное неравенство Минковского. Поэтому в этом случае $\lambda = 1$ есть единственное положительное значение λ. Но мы показали, что $\lambda = 0$ всегда соответствуют одни и те же решения (13). Поэтому, переходя непрерывно от одинаковых $H^{(1)}, \dots, H^{(n-2)}$ к различным, убедимся, что то же будет верно и в общем случае, откуда и следует наша теорема.

Перенесение неравенства (9) на любые выпуклые тела получается благодаря следующей теореме: любые n невырождающихся выпуклых тел можно как угодно точно аппроксимировать аналогичными многогранниками. Доказательство этого простого предложения мы опускаем ([1]).

Математический институт.
Ленинградский университет.

Поступило
10 XI 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Bonnesen u. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Springer (1934).