Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 6—7

МЕХАНИКА

М. К. КУРЕНСКИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТРАЕКТОРИИ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СНАРЯДА

(Представлено академиком А. Н. Крыловым 5 IV 1937)

1. Применяя предложенный в предшествующей заметке способ решения задачи о вычислении элементов траектории центра тяжести снаряда, когда при одночленной формуле для функции сопротивления воздуха $F(v) = a_n v^n$ траектория делится на участки и следовательно когда достаточной для практических расчетов точности вычисления можно достичь с помощью формулы для плотности:

$$H(y) = 1 - ky + k^2y^2; \quad k = 0.00011,$$

приходим к вычислению функций v_0, v_1, ... , y_0, y_1, ... , определяющих скорость $v(\theta)$ и высоту $y(\theta)$:

$$v = v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \ \dots; \quad y = y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \ \dots ,$$

где $\lambda = \frac{ca_n}{g}$ есть весьма малый параметр, значащие цифры которого в расчетах на практике начинаются часто не раньше 4-го места после запятой. Функции v и y должны удовлетворять системе уравнений:

$$\frac{dv}{d\theta} \cdot \cos\theta = v \sin\theta + \lambda v^{n+1}(1 - ky + k^2y^2); \qquad \frac{dy}{d\theta} + \frac{v^2}{g}\operatorname{tg}\theta = 0$$

и начальным условиям:

$$\theta = \theta_0; \quad v = V; \quad y = 0.$$

Дальность $x(\theta)$ и время полета $t(\theta)$ определяются квадратурами из

$$\frac{dx}{d\theta} + \frac{v^2}{g} = 0; \qquad \frac{dt}{d\theta} + \frac{v}{g\cos\theta} = 0$$

и начальных условий:

$$\theta = \theta_0; \quad x = 0; \quad t = 0.$$

2. Меняя показатель n и коэффициент a_n в формуле $F(v) = a_n v^n$ при переходе от одного участка скоростей v к другому, можно достичь точности, достаточной для иных случаев практических расчетов, пренебрегая членами с весьма малыми произведениями $k^2\lambda$; $k\lambda^2$; $k^2\lambda^2$; ...

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, будем иметь легко интегрируемые уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&v_0' \cos\theta = v_0 \sin\theta; \quad y_0' + \frac{v_0^2}{g}\operatorname{tg}\theta = 0,\\
&v_1'\cos\theta = v_1\sin\theta + v_0^{n+1}(1-ky_0); \quad y_1' + \frac{2v_0v_1}{g}\operatorname{tg}\theta = 0,\\
&v_2'\cos\theta = v_2\sin\theta + (n+1)\,v_0^n v_1; \quad y_2' + \frac{v_1^2 + 2v_0v_2}{g}\operatorname{tg}\theta = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Они дают:

$$\left.\begin{aligned}
&v_0 = \frac{V\cos\theta_0}{\cos\theta}; \qquad v_1 = -\frac{V^{n+1}\cos^{n+1}\theta_0}{\cos\theta}(\xi_n^0 - \xi_n) + \\
&\quad + \frac{kV^{n+3}\cos^{n+3}\theta_0}{2g\cos\theta}\left[\frac{\xi_n^0-\xi_n}{\cos^2\theta_0} - (\xi_{n+2}^0 - \xi_{n+2})\right];\\
&v_2 = \frac{(n+1)\,V^{2n+1}\cos^{2n+1}\theta_0}{2g\cos\theta}(\xi_n^0 - \xi_n)^2;\\
&y_0 = \frac{V^2}{2g}\left(1 - \frac{\cos^2\theta_0}{\cos^2\theta}\right); \; y_1 = \frac{V^{n+2}\cos^{n+2}\theta_0}{g}\left[\frac{\xi_n^0-\xi_n}{\cos^2\theta} - (\xi_{n+2}^0 - \xi_{n+2})\right] - \\
&\quad - \frac{kV^{n+4}\cos^{n+4}\theta_0}{2g^2}\left\{\left[\frac{\xi_n^0-\xi_n}{\cos^2\theta_0} - (\xi_{n+2}^0-\xi_{n+2})\right]\frac{1}{\cos^2\theta} - \right.\\
&\quad \left. - \frac{\xi_{n+2}^0 - \xi_{n+2}}{\cos^2\theta_0} + (\xi_{n+4}^0 - \xi_{n+4})\right\};\\
&y_2 = \frac{(n+2)\,V^{2n+2}\cos^{2n+2}\theta_0}{g}\left\{(\xi_n^0-\xi_n)\left[\frac{\xi_n}{\cos^2\theta_0} - \right.\right.\\
&\quad \left. - \frac{n+1}{2(n+2)}(\xi_n^0+\xi_n)\right] - \frac{1}{n+2}\left(\frac{\xi_n^0\sin\theta_0}{\cos^{n+2}\theta_0} - \frac{\xi_n\sin\theta}{\cos^{n+2}\theta}\right) + \\
&\quad \left. + \xi_n^0(\xi_{n+2}^0 - \xi_{n+2}) + \frac{1}{2(n+1)(n+2)}\left(\frac{1}{\cos^{2n+2}\theta_0} - \frac{1}{\cos^{2n+2}\theta}\right)\right\};\\
&t_0 = \frac{V\cos\theta_0}{g}(p_0 - p); \quad t_1 = \frac{V^{n+1}\cos^{n+1}\theta_0}{g}\left[(\xi_n^0-\xi_n)\,p - \right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\cos^{n+1}\theta_0} - \frac{1}{\cos^{n+1}\theta}\right)\right] + \\
&+ \frac{kV^{n+3}\cos^{n+3}\theta_0}{2g^2}\left[p\left(\xi_{n+2}^0 - \xi_{n+2} - \frac{\xi_n^0-\xi_n}{\cos^2\theta_0}\right) - \frac{1}{n+3}\left(\frac{1}{\cos^{n+3}\theta_0} - \right.\right.\\
&\quad \left.\left. - \frac{1}{\cos^{n+3}\theta}\right) + \frac{1}{(n+1)\cos^2\theta_0}\left(\frac{1}{\cos^{n+1}\theta_0} - \frac{1}{\cos^{n+1}\theta}\right)\right];\\
&t_2 = -\frac{(n+1)\,V^{2n+1}\cos^{2n+1}\theta_0}{2g}\left\{(\xi_n^0-\xi_n)\left[\frac{2}{(n+1)\cos^{n+1}\theta_0} + \right.\right.\\
&\quad \left.\left. + p\,(\xi_n^0-\xi_n)\right] - \frac{2}{n+1}(\xi_{2n+1}^0 - \xi_{2n+1})\right\};\\
&x_0 = t_0\cdot V\cos\theta_0; \quad x_1 = t_1\cdot 2V\cos\theta_0;\\
&x_2 = t_2\cdot 2\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot V\cos\theta_0,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где

$$p = \operatorname{tg}\theta; \quad p_0 = \operatorname{tg}\theta_0;$$

$$\xi_m = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^{m+1}\theta}; \qquad \xi_m^0 = \int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\cos^{m+1}\theta}.$$

Будем иметь более точные формулы для расчетов, определяя члены со вторыми степенями k в выражениях для v_1, y_1, x_1, t_1; члены с первыми и вторыми степенями k для v_2, y_2 и т. д.

3. Существуют пятизначные таблицы баллистической функции $\xi_m(\theta)$ для углов θ через $1°$ и для показателей $m=1$, 1.55, 1. 7, 2, 3, ... , 8. Для приведенных формул, когда отбрасываются члены $k^2\lambda$, $k\lambda^2$ и выше, для вычислений x и t эти таблицы функции $\xi_m(\theta)$ надо продолжить до $m=$ $=11$, имея в виду наибольший показатель в формуле сопротивления $n=5$. Если сохранять члены, содержащие $k\lambda^2$, то для x_2, t_2 потребуются значения $\xi_m(\theta)$ до $m=2n+3=13$. Следует также уменьшить интервал для θ до $30'$.

Дифференциальные уравнения при любых целых положительных степенях k и λ интегрируются в квадратурах. Все квадратуры выражаются рационально через тригонометрические функции и через $\xi_m(\theta)$ для всяких m. Существуют формулы, позволяющие вычислять ξ_m через значения с меньшими указателями, например

$$\xi_m = \frac{\sin\theta}{m\cos^m\theta} + \frac{m-1}{m}\xi_{m+2}.$$

4. В том частном случае, когда $\lambda=0$, т. е. при ограничении первыми членами разложений, получим применяющиеся иногда на практике формулы параболической теории:

$$\bar{v} = v_0 = \frac{V\cos\theta_0}{\cos\theta};\quad \bar{y} = y_0 = \frac{V^2}{2g}\left(1 - \frac{\cos^2\theta_0}{\cos^2\theta}\right);$$

$$\bar{x} = x_0 = \frac{V^2\cos^2\theta_0}{g}(p_0 - p);\quad \bar{t} = t_0 = \frac{V\cos\theta_0}{g}(p_0 - p);$$

$$x_0 = t_0 V\cos\theta_0;\quad y_0 = t_0 V\sin\theta_0 - \frac{gt^2}{2} = x_0 p_0 - \frac{gx_0^2}{2V^2\cos^2\theta_0}.$$

Второй частный случай будем иметь, когда $k=0$, т. е. когда атмосфера однородна. В формулах отпадают члены, содержащие множитель k Кроме того дифференциальные уравнения приводят к решению задачи по Бернулли:

$$\bar{\bar{v}} = \frac{V\cos\theta_0}{\cos\theta}U(\theta_0,\ \lambda g V^n,\ \theta);\quad \bar{\bar{y}} = \frac{V^2\cos^2\theta_0}{g}\int\limits_{\theta}^{\theta_0}\frac{U^2\operatorname{tg}\theta}{\cos^3\theta}d\theta;$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{V^2\cos^2\theta_0}{g}\int\limits_{\theta}^{\theta_0}\frac{U^2 d\theta}{\cos^2\theta};\quad \bar{\bar{t}} = \frac{V\cos\theta_0}{g}\int\limits_{\theta}^{\theta_0}\frac{U d\theta}{\cos^2\theta}, \tag{3}$$

где

$$U = [1 + \lambda n V^n\cos^n\theta_0(\xi_n^0 - \xi_n)]^{-\frac{1}{n}}.$$

Единственность решения системы дифференциальных уравнений приводит к формуле, позволяющей определять первые члены выражений для v_1, v_2, v_3, ..., не содержащих k, с помощью формулы бинома:

$$[1 + \lambda n V^n\cos^n\theta_0(\xi_n^0 - \xi_n)]^{-\frac{1}{n}} = 1 + \frac{\lambda v_1\cos\theta}{V\cos\theta_0} + \frac{\lambda^2 v^2\cos\theta}{V\cos\theta_0} + \ldots =$$

$$= 1 - \lambda V^n\cos^n\theta_0(\xi_n^0 - \xi_n) + \lambda^2(n+1)V^{2n}\cos^{2n}\theta_0\frac{(\xi_n^0 - \xi_n)^2}{2} - \ldots$$

Известные результаты об условии применимости формулы бинома приводят к заключению о сходимости рядов в разложениях по степеням λ.

Надо иметь в виду, что до вершины $\xi_n^0 > \xi_n$, а при точке падения может $\xi_n^0 < \xi_n$. Пользуясь формулой $\max(\xi_n^0 - \xi_n) = \xi_n^0$, подставляя значения λ, V, θ_0, ξ_n^0 и вычисляя последовательные члены по формуле бинома, установим легко номер члена $\lambda^n v_n$, нужный для получения желательной степени точности.

Например для стрельбы из 120-мм гаубицы при данных:

$$V_0 = 183 \text{ м/сек. } \theta_0 = 40°; \ d = 0.120 \text{ м}, \ q = 22 \text{ кг}, \ i = 0.668$$

$$\Pi = \Pi_0 = 1.206 \text{ кг/м}^3; \ g = 9.81 \text{ м/сек.}^2$$

получим:

$$\max \lambda 2V^2 \cos^2\theta_0(\xi_2^0 - \xi_2) \approx 0.197 < 0.2; \ (1 + 0.2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 - 0.1 + 0.015 - 0.0025 + \ldots$$

С другой стороны, формулы позволяют без особых затруднений и с желательной точностью вычислять функции v, y, x, t для показателей n, когда не существует надлежащих функций в способе Бернулли ($n \neq 2, 3, 4$), не прибегая к сложным формулам, при которых вычислялись функции для $n = 2, 3, 4$.

5. Если атмосфера неоднородна, то, сохраняя вторые степени параметра k, вместо 3-го и 5-го уравнений системы (1) получим:

$$v_1' \cos\theta = v_1 \sin\theta + v_0^{n+1}(1 - ky_0 + k^2y_0^2),$$

$$v_2' \cos\theta = v_2 \sin\theta + v_0^n \{(n+1)\,v_1 - k[y_1v_0 + (n+1)\,y_0v_1] +$$

$$+ k^2\,[2y_1v_0 + y_0(n+1)\,v_1]y_0\}.$$

Вместо (2) и (3) получим более точные формулы для расчетов, если просуммируем все члены, содержащие степени одного параметра λ, и удержим члены с произведениями первых степеней λ и k. Получим:

$$v = \overline{\overline{v}} + \alpha; \ y = \overline{\overline{y}} + \beta; \ x = \overline{\overline{x}} + \gamma; \ t = \overline{\overline{t}} + \delta.$$

Поправки $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ к формулам (3) имеют вид:

$$\alpha = \lambda k \cdot \frac{V^{n+3}\cos^{n+3}\theta_0}{2g\cos\theta} \cdot (a_1 + a_2 k + a_3\lambda);$$

$$a_1 = \frac{\xi_n^0 - \xi_n}{\cos^2\theta_0} - (\xi_{n+2}^0 - \xi_{n+2}),$$

$$a_2 = -\frac{V^2}{2g}\left[\frac{\xi_n^0 - \xi_n}{\cos^2\theta_0} - 2(\xi_{n+2}^0 - \xi_{n+2}) + \cos^2\theta_0 \cdot (\xi_{n+4}^0 - \xi_{n+4})\right],$$

$$a_3 = -V^n\cos^n\theta_0\left[(n+1)\left(\frac{\xi_n^0 - \xi_n}{\cos_0\theta_0}\right)^2 - (n+3)(\xi_{n+2}^0 - \xi_{n+2})\left(\xi_n^0 - \frac{n-1}{n+3}\xi_n\right) +\right.$$

$$+ 2 \cdot \frac{n+1}{n+2}(\xi_n^{0\,2} - \xi_n^2) + \frac{4}{n+2}\left(\frac{\xi_n^0\sin\theta_0}{\cos^{n+2}\theta_0} - \frac{\xi_n\sin\theta}{\cos^{n+2}\theta}\right) -$$

$$\left. - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{1}{\cos^{2n+2}\theta_0} - \frac{1}{\cos^{2n+2}\theta_0}\right)\right];$$

$$\beta = \lambda k \cdot \frac{V^{n+4}\cos^{n+4}\theta_0}{2g^2}(b_1 + b_2k + b_3\lambda);$$

$$b_1 = -\left[\frac{\xi_n^0 - \xi_n}{\cos^2\theta} - (\xi_{n+2}^0 - \xi_{n+2})\left(1 + \frac{\cos^2\theta_0}{\cos^2\theta}\right) + \cos^2\theta_0\,(\xi_{n+4}^0 - \xi_{n+4})\right];$$

$$b_2 = \frac{V^2}{2g}\left[\frac{\xi_n^0 - \xi_n}{\cos^2\theta} - (\xi_{n+2}^0 - \xi_{n+2})\left(1 + 2\frac{\cos^2\theta_0}{\cos^2\theta}\right) +\right.$$

$$\left. + (\xi_{n+4}^0 - \xi_{n+4})\left(2 + \frac{\cos^2\theta_0}{\cos^2\theta}\right)\cos^2\theta_0 - (\xi_{n+6}^0 - \xi_{n+6})\cos^4\theta_0\right],$$

$$b_3 = V^n \cos^n \theta_0 \cdot \text{fonct}\,(\xi_n^0, \xi_n, \ldots, \xi_{2n+4}^0, \xi_{2n+4});$$

$$\delta = \lambda k \cdot \frac{V^{n+3}\cos^{n+3}\theta_0}{2g^2}(d_1 + d_2 k + d_3 \lambda),$$

$$d_1 = -\left\{\left[\frac{\xi_n^0 - \xi_n}{\cos^2\theta_0} - (\xi_{n+2}^0 - \xi_{n+2})\right]p + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n+3}\left(\frac{1}{\cos^{n+3}\theta_0} - \frac{1}{\cos^{n+3}\theta}\right) - \frac{1}{(n+1)\cos^2\theta_0}\left(\frac{1}{\cos^{n+1}\theta_0} - \frac{1}{\cos^{n+1}\theta}\right)\right\},$$

$$d_2 = \frac{V^2}{2g}\left\{\left[\frac{\xi_n^0 - \xi_n}{\cos^2\theta_0} - 2(\xi_{n+2}^0 - \xi_{n+2}) + (\xi_{n+4}^0 - \xi_{n+4})\cos^2\theta_0\right]p - \right.$$

$$- \frac{1}{(n+1)\cos^2\theta_0}\left(\frac{1}{\cos^{n+1}\theta_0} - \frac{1}{\cos^{n+1}\theta}\right) +$$

$$\left. + \frac{2}{n+3}\left(\frac{1}{\cos^{n+3}\theta_0} - \frac{1}{\cos^{n+3}\theta}\right) - \frac{\cos^2\theta_0}{n+5}\left(\frac{1}{\cos^{n+5}\theta_0} - \frac{1}{\cos^{n+5}\theta}\right)\right\},$$

$$d_3 = V^n \cos^n \theta_0 \cdot \text{fonct}\,(\xi_n^0, \xi_n, \ldots, \xi_{2n+3}^0, \xi_{2n+3});$$

$$\gamma = \lambda k \cdot \frac{V^{n+4}\cos^{n+4}\theta_0}{g^2}(c_1 + c_2 k + c_3 \lambda).$$

6. Выражения b_3, c_3, d_3, во-первых, вычисляются по сложным формулам, а, во-вторых, требуют таблицы функции $\xi_m(\theta)$ для $m = 2n + 4$. Выражение для a_3 определит ошибку вычисления скорости v, когда воспользуемся формулой $\alpha = \lambda k \cdot A \cdot (a_1 + ka_2)$ и положим $\lambda b_3 \approx 0$, $\lambda c_3 \approx \approx 0$, $\lambda d_3 \approx 0$. Тогда вместо γ и δ получим:

$$\gamma_1 = \lambda k \cdot C \cdot (c_1 + kc_2); \quad \delta_1 = \lambda k \cdot D \cdot (d_1 + kd_2); \quad \gamma_1 = \delta_1 \cdot 2V\cos\theta_0.$$

Например при стрельбе из 9-дюймовой мортиры, когда

$$n = 3; \quad V = 315.5 \text{ м/сек.}; \quad \theta_0 = 43°30'; \quad d = 0.2286 \text{ м};$$
$$q = 110.9 \text{ кг}; \quad i = 0.896; \quad g = 9.81 \text{ м/сек.}^2,$$

будет

$$\log \lambda = \overline{8}.3466; \quad \log k = \overline{4}.0414.$$

Для вычисления скорости сразу в вершине находим поправку α на изменение скорости с изменением плотности воздуха от точки вылета до вершины траектории:

$$a_1 + a_2 k + a_3 \lambda = 0.06; \quad \alpha = 1.09 \text{ м/сек.}$$

Научно-исследовательский институт
математики и механики.
Ленинградский государственный
университет им. А. С. Бубнова.

Поступило
5 IV 1937.