Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 6—7

МАТЕМАТИКА

Д. МЕНЬШОВ

РЯДЫ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ, ОГРАНИЧЕННЫМ В СВОЕЙ СОВОКУПНОСТИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 10 IV 1937)

Предположим, что

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{1}$$

есть нормированная система функций, ортогональных на интервале (0,1), т. е.

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \tag{2}$$

Известно, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{3}$$

сходится почти всюду на (0,1), если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lg n)^2 c_n^2, \tag{4}$$

где c_n — действительные постоянные величины ([1]). При этом в ряде (4) функцию $(\lg n)^2$ нельзя заменить другой положительной функцией $W(n)$, которая возрастает медленнее, чем $(\lg n)^2$, т. е. удовлетворяет условию

$$\lim_{n \to \infty} \frac{W(n)}{(\lg n)^2} = 0. \tag{5}$$

В самом деле, если $W(n)$ есть какая-нибудь положительная функция, удовлетворяющая условию (5), то всегда можно определить нормированную систему ортогональных функций (1) и последовательность действительных постоянных c_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, таких, что ряд (3) расходится всюду на (0,1), в то время как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} W(n)\, c_n^2 \tag{6}$$

сходится ([2]).

Мы будем говорить, что функции $\varphi_n(x)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, ограничены в своей совокупности на интервале (0,1), если существует положительное число M, не зависящее ни от x ни от n и такое, что выполняется неравенство

$$|\varphi_n(x)| < M \tag{7}$$

для всех натуральных чисел n и для всех значений x на (0,1). Известно, что для всякой положительной функции $W(n)$, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{W(n)}{\lg n}=0$, можно определить нормированную систему (1) ортогональных функций, ограниченных в своей совокупности, и последовательность действительных постоянных c_n, $n=1, 2, 3, \ldots$ таких, что ряд (3) расходится всюду на (0,1), в то время как ряд (6) сходится ([3]).

Предположим теперь, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lg n\cdot c_n^2$. Возникает вопрос, будет ли отсюда следовать сходимость ряда (3) почти всюду на (0,1), если предположить, что функции $\varphi_n(x)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, ограничены в своей совокупности. На этот вопрос получается отрицательный ответ. В самом деле, можно доказать следующую теорему:

Для всякой положительной функции $W(n)$, удовлетворяющей условию (5), *можно определить нормированную систему* (1) *ортогональных функций, ограниченных в своей совокупности на* (0,1), *и последовательность действительных постоянных c_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, таких, что ряд* (3) *расходится всюду на* (0,1), *в то время как ряд* (6) *сходится.*

В силу рассуждений, которые уже неоднократно применялись при рассмотрении аналогичных вопросов ([4]), эта теорема получается как следствие из леммы:

Для любого достаточно большого натурального числа m можно определить функции $\psi_k(x)$ и действительные постоянные A_k, $1\leqslant k\leqslant m$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. *$\psi_k(x)$, $1\leqslant k\leqslant m$ определены на некотором интервале (a, b), не зависящем от m, и образуют на этом интервале нормированную систему ортогональных функций.*

2. *Существует интервал (a', b'), $a'<b'$, лежащий на (a, b) и не зависящий от m, для всех точек которого выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{l(x)} A_k\psi_k(x) > C,$$

где $l(x)$ вообще зависит от x, $1\leqslant l(x)\leqslant m$, и C есть положительная постоянная величина.

3.
$$\sum_{k=1}^{m} A_k^2 < \frac{C'}{(\lg m)^2},$$

где C' — постоянная величина.

4.
$$|\psi_k(x)| < C'' \qquad (a\leqslant x\leqslant b,\ 1\leqslant k\leqslant m),$$

где C'' — постоянная величина.

5. *Каждая из функций $\psi_k(x)$, $1\leqslant k\leqslant m$, постоянна по отрезкам на интервале (a, b), т. е. интервал (a, b) можно разбить на конечное*

число интервалов, на каждом из которых любая из функций $\psi_k(x)$ *постоянна.*

Лемма будет очевидно доказана, если мы определим функции $\psi_k(x)$ и числа A_k, удовлетворяющие условиям 1, 2, 3, 4 и 5, для $m=\nu^2$, где ν есть любое целое число, большее 3. Определим прежде всего некоторые вспомогательные функции. Положим:

$$\left.\begin{aligned} \omega_k(x) &= \frac{\nu}{\nu^2 x - k - \nu} \qquad \left(-\infty < x < \frac{k}{\nu^2}\right), \\ \omega_k(x) &= \frac{\nu}{\nu^2 x - k + \nu} \qquad \left(\frac{k}{\nu^2} \leqslant x < +\infty\right), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Если $\nu > 3$, то можно доказать, что функции $\omega_k(x)$ обладают следующими свойствами:

$$\alpha)\qquad \left|\int_{-1}^{2} \omega_k(x)\,\omega_l(x)\,dx\right| < \frac{4\nu}{p(p+2\nu)} \lg\left(1+\frac{p}{\nu}\right) + \frac{2}{\nu^2}$$

$$(k \neq l,\ 1 \leqslant k \leqslant \nu^2,\ 1 \leqslant l \leqslant \nu^2,\ p = |k-l|);$$

$$\beta)\qquad |\omega_k(x)| \leqslant 1 \qquad (-\infty < x < +\infty,\ 1 \leqslant k \leqslant \nu^2);$$

$$\gamma)\qquad \sum_{k=1}^{l(x)} \omega_k(x) > \frac{1}{2}\nu \lg \nu \qquad \left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right),$$

где $l(x)$ вообще зависит от $\underline{x}$, причем $1 \leqslant l(x) \leqslant \nu^2$.

Заменим функции $\omega_k(x)$ новыми функциями $\chi_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant \nu^2$, которые определены на интервале $(-1, 2)$ и удовлетворяют условиям:

$$\text{a)}\qquad |\chi_k(x) - \omega_k(x)| < \frac{1}{\nu^2} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant \nu^2);$$

b) каждая из функций $\chi_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant \nu^2$ постоянна по отрезкам на интервале $(-1, 2)$.

Можно легко доказать, что функции $\chi_k(x)$ обладают следующими свойствами:

$$\text{c)}\qquad |\alpha_{kl}| < \gamma_p \qquad (k \neq l,\ 1 \leqslant k \leqslant \nu^2,\ 1 \leqslant l \leqslant \nu^2),$$

где

$$\alpha_{kl} = \int_{-1}^{2} \chi_k(x)\,\chi_l(x)\,dx,\quad \gamma_p = \frac{4\nu}{p(p+2\nu)} \lg\left(1+\frac{p}{\nu}\right) + \frac{9}{\nu^2},\ p = |k-l|; \tag{9}$$

$$\text{d)}\qquad |\chi_k(x)| < 2 \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant \nu^2);$$

$$\text{e)}\qquad \sum_{k=1}^{l(x)} \chi_k(x) > \frac{1}{4}\nu \lg \nu \qquad \left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right),$$

где $l(x)$ вообще зависит от $\underline{x}$ и $1 \leqslant l(x) \leqslant \nu^2$.

Положим

$$c_0 = 2,\quad c_p = 2\left(1 + \sum_{s=1}^{p} \gamma_s\right) \qquad (1 \leqslant p < \nu^2), \tag{10}$$

откуда

$$c_p - c_{p-1} = 2\gamma_p \qquad (1 \leqslant p < \nu^2). \tag{11}$$

Кроме того можно доказать, что

$$c_{\nu^2-1} < b, \tag{12}$$

где

$$b = 4 \cdot \left[5 + 2 \int_0^{\infty} \frac{\lg (1+z)}{z(z+2)} dz \right], \tag{13}$$

т. е. b есть конечная величина, которая не зависит от ν.

Мы уже определили на интервале $(-1, 2)$ ν^2 функций $\chi_k(x)$, которые обладают свойствами a), b), c), d) и e). Распространим теперь определение этих функций на интервал $(2, b)$. Принимая во внимание равенство (11) и свойство c) функций $\chi_k(x)$ на интервале $(-1, 2)$, мы можем определить функции $\chi_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant \nu^2$, на интервале $(2, b)$ таким образом, чтобы выполнялись условия:

f) Функции $\chi_k(x)$ постоянны по отрезкам на интервале $(2, b)$ и могут принимать на этом интервале только два значения $+1$ и -1.

g)
$$\int_{c_{p-1}}^{c_p} \chi_k(x) \chi_l(x)\, dx = \begin{cases} -a_{kl}, & \text{если } |k-l| = p, \\ 0, & \text{если } |k-l| \neq p, \end{cases}$$
$$(k \neq l,\ 1 \leqslant k \leqslant \nu^2,\ 1 \leqslant l \leqslant \nu^2).$$

h)
$$\int_{c_{\nu^2-1}}^{b} \chi_k(x) \chi_l(x)\, dx = 0 \qquad (k \neq l)\ ^*.$$

Полагая $a = -1$ и принимая во внимание равенство (9) и свойства g), h) функций $\chi_k(x)$, мы немедленно получаем:

$$\int_a^b \chi_k(x) \chi_l(x)\, dx = 0 \tag{14}$$
$$(k \neq l,\ 1 \leqslant k \leqslant \nu^2,\ 1 \leqslant l \leqslant \nu^2).$$

Положим

$$\psi_k(x) = \frac{\chi_k(x)}{\sqrt{\int_a^b \chi_k^2(x)\, dx}}, \tag{15}$$

откуда

$$\int_a^b \psi_k^2(x)\, dx = 1 \qquad (1 \leqslant k \leqslant \nu^2). \tag{16}$$

Принимая во внимание свойства d) и f) функций $\chi_k(x)$, мы можем написать:

$$2(b-a) > \int_a^b \chi_k^2(x)\, dx > b - 2. \tag{17}$$

Следовательно на основании равенства (15) и упомянутых выше свойств d), f) функций $\chi_k(x)$ будем иметь:

$$|\psi_k(x)| < C'' \qquad (a \leqslant x \leqslant b,\ 1 \leqslant k \leqslant \nu^2),$$

---

* Функции $\chi_k(x)$, удовлетворяющие условиям f), g) и h), можно определить при помощи рассуждений, которыми пользовались А. Колмогоров и Д. Меньшов в указанной выше работе, loc. cit.

где C'' — постоянная величина, т. е. функции $\psi_k(x)$ удовлетворяют условию 4 нашей леммы (при $m = \nu^2$). Кроме того на основании (14) и (16) функции $\psi_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant \nu^2$, попарно ортогональны на (a, b) и образуют нормированную систему, т. е. удовлетворяют условию 1 настоящей леммы.

Положим

$$a' = \frac{1}{2}, \quad b' = 1, \quad A_k = \frac{1}{\nu \lg \nu} \sqrt{\int_a^b \chi_k^2(x)\, dx}\,, \tag{18}$$

откуда на основании (17)

$$\frac{b-2}{\nu \lg \nu} < A_k < \frac{2(b-a)}{\nu \lg \nu} \qquad (1 \leqslant k \leqslant \nu^2). \tag{19}$$

Принимая во внимание равенства (15), (18), неравенство (19) и свойства e), b), f) функций $\chi_k(x)$, можно доказать, что эти функции, а также постоянные величины A_k, $1 \leqslant k \leqslant \nu^2$ удовлетворяют условиям 2, 3 и 5 настоящей леммы. В таком случае эта лемма, а следовательно и теорема, формулированная в настоящей заметке, доказаны *.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
10 IV 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Rademacher, Math. Annalen, **87**, 112 (1922). D. Menchoff, Fundamenta Mathematicae, **4**, 82 (1923). [2] D. Menchoff, loc. cit. [3] A. Kolmogoroff et D. Menchoff, Math. ZS., **26**, 432 (1927). [4] D. Menchoff, loc. cit. или A. Kolmogoroff et D. Menchoff, loc. cit.

* Более подробное доказательство этой теоремы будет опубликовано в Математическом сборнике.