Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 6—7

МАТЕМАТИКА

Академик И. М. ВИНОГРАДОВ.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕЧЕТНОГО ЧИСЛА СУММОЮ ТРЕХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Простейшие примеры применения моего метода к теории простых чисел были даны еще в 1934 г. (1).

В настоящей работе я даю применение этого метода к оценке суммы

$$\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p},$$

откуда, пользуясь одной новой теоремой о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях (2) (разность прогрессии медленно растет с увеличением числа ее членов), я выводу асимптотическое выражение для числа представлений нечетного $N > 0$ в форме

$$N = p_1 + p_2 + p_3.$$

Отсюда непосредственно следует, что всякое достаточно большое нечетное число можно представить в виде суммы трех простых чисел. Это есть полное решение проблемы Гольбаха для нечетных чисел.

Оценки настоящей работы могут быть заменены гораздо более точными оценками.

Обозначения. $N > 0$ нечетное, достаточно большое; $n = \log N$; h, h_1, h_2—произвольно большие постоянные > 3; $\tau = Nn^{-3h}$; $\tau_1 \doteq = Nn^{-h}$;

θ вещественное; $|\theta| \leqslant 1$;

$$A \ll B; \ \ A = O(B)$$

показывает, что отношение $\frac{|A|}{B}$ не превосходит некоторого постоянного;

(d) обозначает последовательность, состоящую из делителей $d \leqslant N$ произведения H всех простых чисел $\leqslant \sqrt{N}$; (d_0) обозначает часть этой последовательности, включающую все d с четным числом простых делителей; (d_1) обозначает часть той же последовательности, включающую все d с нечетным числом простых делителей. Последовательность (d)

разбивается также на две последовательности (d') и (d''). Первая содержит числа d с условием, что все простые делители

$$\leqslant n^{3h};$$

вторая содержит все остальные числа d.

Соответственно этому последовательности (d_0) и (d_1) разобьются на последовательности (d_0'), (d_0'') и (d_1'), (d_1'').

Лемма. Пусть даны две возрастающие последовательности (x) и (y) целых положительных чисел:

$$1 < U_0 < U_1 \leqslant N_1 \leqslant N;\ m \text{ целое} > 0;$$

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{\tau q};\ (a,\ q) = 1;\ 0 < q \leqslant \tau;\ m = m_1\delta;\ q = q_1\delta;\ \delta = (m,\ q);$$

$$T = \sum_x \sum_y e^{2\pi i\alpha mxy},$$

где x пробегает числа последовательности (x) с условием

$$U_0 < x \leqslant U_1$$

и y при каждом данном x пробегает числа последовательности (y) с условием

$$0 < y \leqslant \frac{N_1}{x}.$$

Тогда имеем

$$T \ll N_1 n \sqrt{\frac{n}{U_0} + \frac{U_1}{N_1} + \frac{q_1 n}{N_1} + \frac{1}{q_1} + \frac{m_1}{\tau}}.$$

Теорема 1. Пусть

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau};\ (a,\ q) = 1;\ n^{3h} \leqslant q \leqslant \tau.$$

Тогда имеем

$$S = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i\alpha p} \ll Nn^{2-h}.$$

Доказательство. Имеем

$$S = \sum_{(d)} \mu(d) S_d + O(\sqrt{N});\quad S_d = \sum_{m=1}^{\frac{N}{d}} e^{2\pi i\alpha md} \tag{1}$$

Отсюда легко находим

$$S = \sum_{d < \tau_1} \mu(d) S_d + O(Nn^{-h+1}) =$$

$$= T_0 - T_1 + O(Nn^{-h+1});\ T_0 = \sum_{(d_0)} S_d;\ \ T_1 = \sum_{(d_1)} S_d, \tag{2}$$

где d пробегает лишь значения $> \tau_1$. Мы оценим лишь T_0, так как T_1 оценивается аналогичным способом.

Перестановкой порядка суммирования получаем

$$T_0 = \sum_m T(m);\quad T(m) = \sum_d e^{2\pi i\alpha md}, \tag{3}$$

где m пробегает числа

$$m = 1,\ \ldots,\ [n^h],$$

и d, при каждом данном m, пробегает числа (d_0), удовлетворяющие условию

$$\tau_1 < d \leqslant \frac{N}{m}.$$

Далее находим

$$T(m) = T''(m) + O\left(\frac{N}{m} n^{-h}\right), \tag{4}$$

где $T''(m)$ содержит лишь слагаемые суммы $T(m)$, отвечающие значениям d последовательности (d_0''). Действительно, часть $T'(m)$ суммы $T(m)$, отвечающая значениям d последовательности (d_0'), не превосходит числа членов последовательности (d'), не превосходящих $\frac{N}{m}$. Но это число имеет порядок значительно более низкий, чем

$$\frac{N}{m} n^{-h}.$$

Но если d принадлежит (d_0'') и k—число простых сомножителей d, то

$$k < n.$$

Поэтому

$$T''(m) = \sum_{k<n} T_k(m), \tag{5}$$

где $T_k(m)$ состоит из членов $T''(m)$, содержащих ровно k простых делителей $> n^{3h}$. Далее находим

$$T_k(m) = \frac{1}{k} T_{k0}(m) + O\left(\frac{N}{mk} u^{-3h}\right), \tag{6}$$

где

$$T_{k0}(m) = \sum_u \sum_v e^{2\pi i \alpha m v u},$$

причем u пробегает простые $\geqslant n^{3h}$, принадлежащие (d), и v, при данном u, пробегает числа с условием

$$\frac{\tau_1}{u} < v \leqslant \frac{N}{mu},$$

принадлежащие (d_1). К сумме T_{k0} уже непосредственно применяется лемма. Получим

$$T_{k0}(m) \ll N \frac{n^{\frac{3}{2}-\frac{3h}{2}}}{\sqrt{m}}.$$

А тогда из формул (6), (5), (4), (3) и (2) мы и выводим теорему 1.

Теорема 2. Число I_N представлений N в форме

$$N = p_1 + p_2 + p_3$$

выражается формулой

$$I_N = RS + O(N^2 n^{-c}),$$

где c—произвольно большое постоянное > 3 и

$$S = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{q_1^3} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ (a,\, q)=1}} e^{2\pi i \frac{a}{q} N}; \quad R = \frac{N^2}{2n^3}(1+\lambda); \ \lim_{N\to\infty} \lambda = 0; \ q_1 = \varphi(q).$$

Доказательство. a) Имеем

$$I_N = \int_0^1 S_\alpha^3 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha; \quad S_\alpha = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}.$$

Интервал интегрирования подразделяем на интервалы двух классов с условиями

1. $\alpha = \frac{a}{q} + z;\ (a,\ q) = 1;\ 0 < q \leqslant n^{3h};\ -\frac{1}{\tau} \leqslant z \leqslant \frac{1}{\tau}.$

2. Оставшиеся интервалы. Для них

$$\alpha = \frac{a}{q} + z;\ (a,\ q) = 1;\ n^{3h} < q \leqslant \tau;\ |z| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Соответственно такому делению на интервалы имеем

$$I_N = I_{N1} + I_{N2}. \tag{7}$$

b) Применяя теорему 1, находим

$$I_{N2} \ll Nn^{2-h} \int_0^1 |S_\alpha|^2 d\alpha \ll Nn^{2-h} \int_0^1 \sum_{p \leqslant N} \sum_{p_1 \leqslant N} e^{2\pi i\alpha(p-p_1)} d\alpha \ll$$
$$\ll Nn^{2-h} \frac{N}{n} \ll N^2 n^{1-h}.$$

c) Вычисление I_{N1} не представляет трудностей. Оно выполняется тем же путем, как в проблеме Варинга, причем мы пользуемся новой теоремой о распределении простых чисел в арифметической прогрессии. Если α принадлежит интервалу первого класса, то находим

$$S_\alpha = \frac{\mu(q)}{q_1} V(z) + O(Nn^{-h_1});\quad V(z) = \int_2^N \frac{e^{2\pi izx}}{\log x} dx,$$

откуда часть интеграла I_{N1}, отвечающая данной дроби $\frac{a}{q}$, представится в форме

$$R \frac{\mu(q)}{q_1^3} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} + O(Nn^{-h_2});\quad R = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} [V(z)]^2 e^{-2\pi izN} dz,$$

где R может быть представлено в форме

$$R = \frac{N^2}{2n^3}(1 + \lambda);\ \lim_{N\to\infty} \lambda = 0.$$

Отсюда уже без труда находим

$$I_{N1} = RS + O(N^2 n^{-h_3}),$$

откуда в виду (7) и (8) теорема следует непосредственно.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
19 V 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Виноградов, ДАН, III, 1, IV, 4 (1934). [2] A. Walfitz, Math. ZS., 40 (1936).